

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE GRADE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

François SERRE

PREMIÈRE THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS PERMANENTS ET VARIABLES DANS LES CANAUX

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

soutenues le 12 juin 1952 devant la Commission d'examen

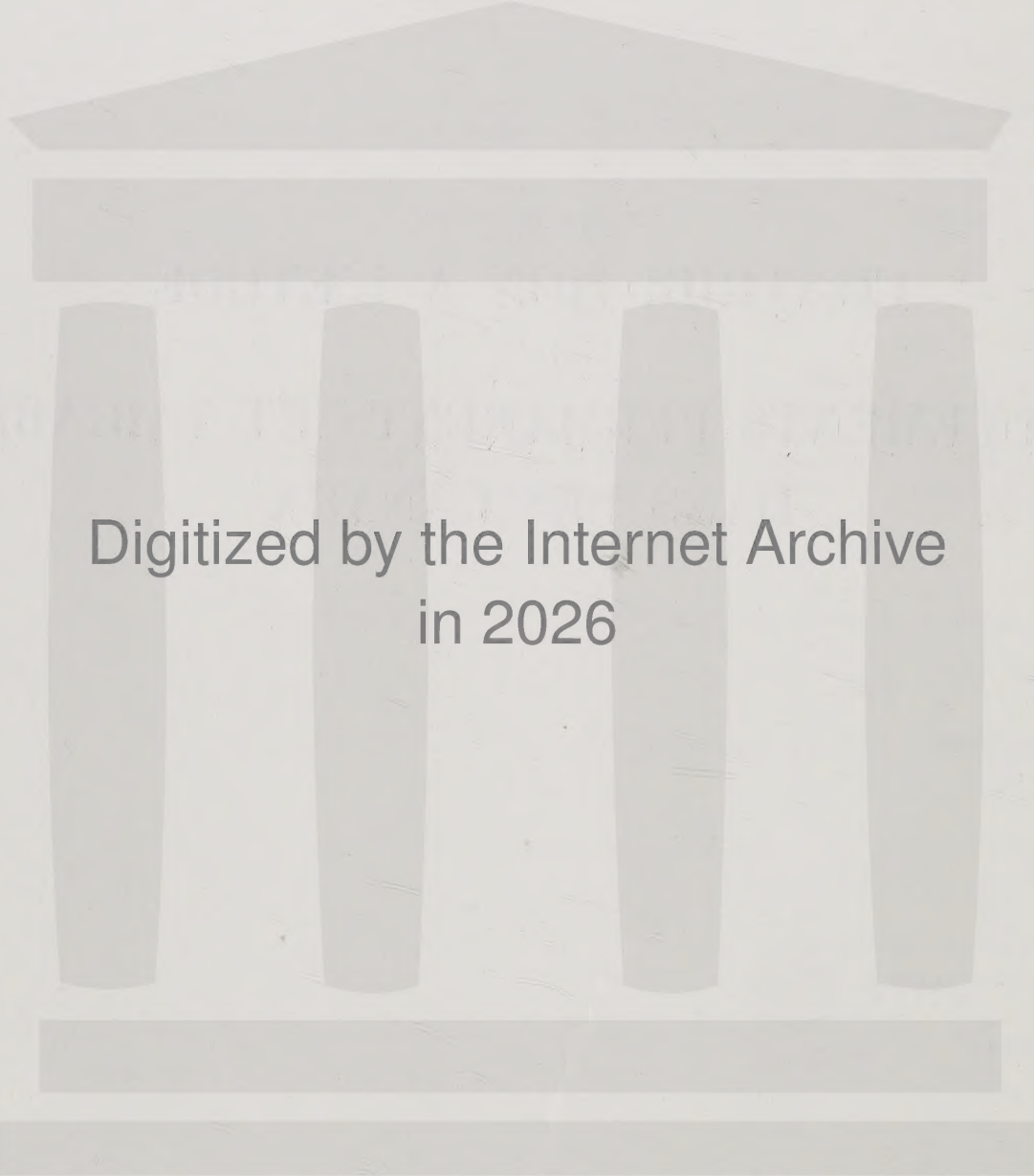
MM. PÉRÈS, *Président.*

FORTIER, }
PONCIN. } *Examineurs.*

LA HOUILLE BLANCHE
GRENOBLE (France)

1954

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE
DES
ÉCOULEMENTS PERMANENTS ET VARIABLES
DANS LES CANAUX



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551509_0015

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE GRADE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

François SERRE

PREMIÈRE THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS PERMANENTS ET VARIABLES DANS LES CANAUX

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

soutenues le 12 juin 1952 devant la Commission d'examen

MM. PÉRÈS,	<i>Président.</i>
FORTIER, PONCIN.	<i>Examineurs.</i>

LA HOUILLE BLANCHE
GRENOBLE (France)

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. A. CHATELET.

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).
A. DENJOY	T	Théorie des Fonctions.	CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	P. DRACH	T	Zoologie.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	KASTLER	T	Physique.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
M ^{me} RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.	EPHRUSSI	T	Génétique.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale.	BAUER	T	Chimie - Physique.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	RIVIÈRE	T	Géologie (P.C.B.).
JOB	T	Chimie générale.	GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	LUCAS	T	Physique.
COMBES	T	Physiologie végétale.	A. THOMAS	T	Evolution des êtres organisés.
GARNIER	T	Mécanique des fluides et applications.	ARNULF	T	Optique appliquée.
PÉRÈS	T	Géométrie supérieure.	MAX MORAND	T	Physique.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	SOLEILLET	T	Physique.
TOUSSAINT	T	Technique Aéronautique.	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	DANJON	T	Astronomie.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	FROMAGEOT	T	Chimie biologique.
CHAZY	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	LAPORTE	T	Physique générale et Radio-activité.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	JANET	T	Mathématiques générales.
DUPONT	T	Théories chimiques.	PETIT	T	Biologie maritime.
VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	GALLIEN	T	Biologie animale (P.C.B.).
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.	EICHHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.).
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (P.C.B.).
Jacques BOURCART.	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie-Physique.
AUBEL	T	Chimie biologique.	THELLIER	T	Physique du Globe.
M ^{me} JOLIO-CURIE.	T	Physique générale et Radio-activité.	AUDUBERT	T	Electrochimie.
PLANTEFOL	T	Botanique.	L'HÉRITIER	T	Génétique.
CABANNES	T	Recherches physiques.	GRIVET	T	Radio-Electricité.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	DUBREIL	T	Mathématiques générales.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	QUELET	T	Chimie (P.C.B.).
WYART	T	Minéralogie.	GAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
TEISSIER	T	Zoologie.	CHAMPETIER	T	Chimie appliquée.
MANGÉNOT	T	Biologie végétale.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	JUNG	T	Pétrographie.
MONNIER	T	Physiologie générale.	TRILLAT	T	Physique (P.C.B.).
PIVETEAU	T	Géologie.	WIEMANN	T	Chimie (P.C.B.).
ROCARD	T	Physique.	JACQUINOT	T	Physique (P.C.B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N. Supérieure).	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.	DESTOUCHES	T	Théories physiques.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	M. PRUVOST	T	Géologie.
FAVARD	T	Mécanique générale.	AMIEL	T	Chimie (P.C.B.).
COULOMB	T	Physique du Globe.	HOCART	T	Minéralogie.
			MACHEBŒUF	T	Microbiologie.
			J.-P. MATHIEU	T	Physique (P.C.B.).
			COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
			MAY	T	Biologie animale (P.C.B.).
			CHOQUET	T	Calcul différentiel.
			FELDMANN	T	Biologie (P.C.B.).
			GUINIER	T	Physique (P.C.B.).
			JOST	T	Biologie (P.C.B.).

Secrétaire CH. MONIER.



CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS PERMANENTS ET VARIABLES DANS LES CANAUX

RÉSUMÉ

importance et portée de l'hypothèse consistant à négliger la courbure des filets liquides. Etablissement des équations différentielles de l'écoulement permanent compte tenu des effets de courbure, d'une part en appliquant le théorème des quantités de mouvement, d'autre part en appliquant le théorème de Bernoulli. L'exploitation de ces équations pour l'étude générale des courbes de remous.

Applications à la détermination des lignes de remous dans un certain nombre de cas classiques en régime permanent : écoulement fluvial et torrentiel, ressaut, ressaut ondulé (théorie du déferlement) — changements de pente et notion de section de contrôle — écoulements par vanne de fond — déversoirs à large seuil (influence de la rugosité, ondulations de surface, résultats théoriques et expérimentaux).

Etude du régime variable : établissement des équations aux dérivées partielles de l'écoulement. Le parti que l'on peut en tirer dans l'étude des intumescences, de la houle, du ressaut déferlant en régime variable.

SYNOPSIS

The importance and consequences of the hypothesis involving disregard of stream curvature. Development of differential equations for the permanent flow, taking into account the effects of curvature, by applying the momentum principle on the one hand, and the Bernoulli theorem on the other. Exploitation of these equations for the general study of backwater curves.

Applications to the determination of the backwater curve in a certain number of classical cases under permanent flow : tranquil flow, jump, undulated jump (breaking theory)—changes of bottom slopes and notion of control section—discharge under bottom gates—broad-crested weirs (influence of roughness, surface undulations, theoretical and experimental results).

Study of the non-permanent flow; formation of partial differential equations of flow. The advantages which can be gained in the study of swell, waves, breaking jump under variable flow.

INTRODUCTION

Nous nous proposons, dans ce mémoire, d'étudier les écoulements permanents et variables dans les canaux, en tenant compte de l'inclinaison et de la courbure des filets liquides, hypothèses qui n'interviennent pas dans la théorie des écoulements « graduellement variés ».

Cette restriction conduit, pour les écoulements permanents, à des résultats physiquement absurdes lorsque la hauteur d'eau est voisine de la hauteur critique. L'équation différentielle de la ligne d'eau montre que la pente de la surface libre tend alors vers l'infini, ce qui est en contradiction avec une des hypothèses de la théorie, qui suppose essentiellement la composante verticale de la vitesse négligeable vis-à-vis de la composante horizontale. Les équations que nous allons établir vont nous permettre de prouver que le passage par la hauteur critique n'entraîne pas obligatoirement une augmentation très forte de la pente et d'expliquer les phénomènes d'ondulation de la surface libre, pour lesquels l'effet de courbure joue un rôle particulier.

De la même façon, les équations aux dérivées partielles des écoulements variables nous conduiront à une étude complète des ondes de translation et nous permettront de considérer comme des « ondes stationnaires » les ondulations de surface et le ressaut en régime permanent.

I. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT

Dans tout ce qui va suivre, nous nous placerons délibérément dans l'hypothèse d'un écoulement plan en considérant un canal prismatique de section rectangulaire et de grande largeur l vis-à-vis de la hauteur d'eau y .

Nous supposerons également la pente i suffisamment faible pour qu'on puisse poser :

$$\cos i = 1 \quad \sin i = i$$

adoptant le mode de représentation d'EULER, nous prendrons pour axes de coordonnées Ox dirigé vers le bas suivant l'axe du radier, Oz perpendiculaire au radier dirigé vers le haut.

Appliquons le théorème des quantités de mouvement à la portion de fluide comprise entre les sections (s) et (s') d'abscisse x et $x + dx$.

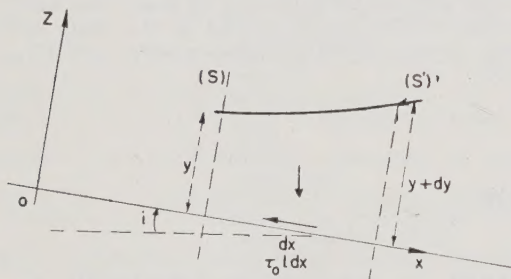


FIG. 1

En projection sur l'axe Ox , on obtient :

$$\int \int_{(s')} p \, d\sigma + \int \int_{(s')} \rho u^2 \, d\sigma - \int \int_{(s)} \rho u^2 \, d\sigma - \int \int_{(s)} p \, d\sigma = \rho g l i y \, dx - \tau_0 l \, dx \quad (1)$$

avec les notations suivantes :

u composante de la vitesse sur l'axe Ox ,

τ_0 force de frottement sur le radier par unité de surface.

Cette équation est écrite en supposant, ce qui est conforme à l'expérience, que le fluide peut être considéré comme parfait en dehors de la

couche limite, l'influence de la viscosité se traduisant par une force de frottement tangentielle du liquide sur la paroi.

Par analogie avec l'étude des écoulements graduellement variés, posons :

$$M = \frac{1}{l} \int \int_{(s)} \frac{p}{\rho g} \, d\sigma + \frac{1}{l} \int \int_{(s)} \frac{u^2}{g} \, d\sigma$$

M est une fonction de x définie par l'intégrale simple :

$$M(x) = \int_0^{y(x)} \frac{p(z, x)}{\rho g} \, dz + \int_0^{y(x)} \frac{u^2(z, x)}{g} \, dz \quad (2)$$

l'équation (1) s'écrit alors :

$$M(x + dx) - M(x) = \left[i y - \frac{\tau_0}{\rho g} \right] dx$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dM}{dx} = i y - \frac{\tau_0}{\rho g} \quad (3)$$

Le fluide pouvant être considéré comme parfait en dehors de la couche limite, la répartition de la pression dans la section (s) est donnée par l'équation :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 - \frac{u}{g} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w}{g} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4)$$

qui conduirait, en négligeant la composante transversale de la vitesse, à une répartition hydrostatique de la pression.

En ce qui concerne la répartition des vitesses normales dans la section (s) , nous admettrons que la courbe de répartition est indépendante de la section et reste identique en coordonnées sans dimensions, et nous poserons :

$$\frac{u(z, x)}{U} = F\left(\frac{z}{y}\right)$$

U désignant la valeur moyenne dans la section (s) de la composante horizontale de la vitesse u :

$$U = \frac{Q}{ly} = \frac{1}{y} \int_0^y u(z, x) \, dz$$

u et w étant liés par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

on peut poser :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

on en déduit :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{Q}{ly} F' \left(\frac{z}{y} \right)$$

$$\psi(x, z) = \frac{Q}{l} F \left(\frac{z}{y} \right) + \varphi(x)$$

φ étant une fonction arbitraire de x , d'où :

$$w(z, x) = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Q}{ly^2} F' \left(\frac{z}{y} \right) z \frac{dy}{dx} - \varphi'(x)$$

$$w(z, x) = u(z, x) \frac{z}{y} \frac{dy}{dx} - \varphi'(x)$$

L'écoulement étant permanent, la surface libre est ligne de courant; on doit donc avoir :

$$w(y, x) = u(y, x) \frac{dy}{dx}$$

$\varphi'(x)$ est donc identiquement nul et :

$$w(z, x) = u(z, x) \frac{z}{y} \frac{dy}{dx}$$

on a également :

$$w(0, x) = 0$$

Dans ces conditions, l'équation (4) s'écrit :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 + \left[\frac{Q^2}{gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right] \left(\frac{z}{y^2} \right) F'^2 \left(\frac{z}{y} \right)$$

ou, en intégrant et en écrivant qu'à la surface libre :

$$z = y \quad p = 0$$

$$\frac{1}{\rho g} p(z, x) = -z + y + \left[\frac{Q^2}{gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right] \int_y^z \frac{\alpha}{y^2} F' \left(\frac{\alpha}{y} \right) d\alpha$$

ou, en posant $\alpha/y = \beta$ (β étant une variable sans dimension) :

$$\frac{1}{\rho g} p(z, x) = -z + y + \left[\frac{Q^2}{gl^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta \quad (5)$$

on peut alors effectuer le calcul des intégrales définies figurant dans (2) :

$$\frac{1}{\rho g} \int_0^y p(z, x) dz = \int_0^y (y - z) dz + \left[\frac{Q^2}{gl^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_0^y \frac{dz}{y} \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta$$

ou, en posant $z/y = \lambda$ (λ étant une variable sans dimension) :

$$\frac{1}{\rho g} \int_0^y p(z, x) dz = \frac{y^2}{2} + \left[\frac{Q^2}{gl^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_0^1 d\lambda \int_{\lambda}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta$$

En définitive :

$$\frac{1}{\rho g} \int_0^y p dz = \frac{y^2}{2} + K \left[\frac{Q^2}{gl^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

$K = \int_0^1 d\lambda \int_{\lambda}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta$ étant une constante dont la valeur est donnée par la courbe de répartition des vitesses dans une section.

$$\int_0^y \frac{u^2}{g} dz = \frac{Q^2}{gl^2 y^2} \int_0^y F'^2 \left(\frac{z}{y} \right) dz$$

ou en posant $z/y = \lambda$:

$$\int_0^y \frac{u^2}{g} dz = \frac{Q^2}{gl^2 y} \int_0^1 F'^2(\lambda) d\lambda = \alpha \frac{Q^2}{gl^2 y}$$

$\alpha = \int_0^1 F'^2(\lambda) d\lambda$ étant un coefficient de répartition des vitesses.

L'équation (2) prend alors la forme :

$$M(x) = \frac{y^2}{2} + \alpha \frac{Q^2}{gl^2 y} + K \frac{Q^2}{gl^2} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

Avec les hypothèses du mouvement graduellement varié (répartition uniforme des vitesses et hydrostatique des pressions dans la section), M était une quantité caractéristique de la section et ne dépendait que de la hauteur d'eau y :

$$M = \frac{y^2}{2} + \frac{Q^2}{gl^2 y}$$

REMARQUE. — Les équations précédentes ont été obtenues par application du théorème des quantités de mouvement en projection sur l'axe Ox . Appliquons le théorème des quantités de mouvement en projection sur l'axe Oz à la portion de fluide comprise entre les sections (s) et (s') et située au-dessus du plan de cote z .

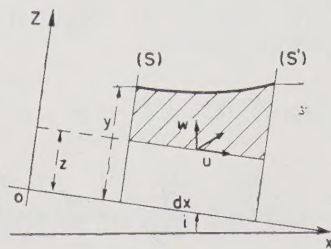


FIG. 2

L'influence de la viscosité étant négligeable en dehors de la couche limite, on a :

$$l \rho g (y - z) dx + \int_{(s')} \rho u w d\sigma - \int_{(s)} \rho u w d\sigma - l \rho w^2 (z, x) dx = l p (z, x) dx$$

Posons :

$$L(x, z) = \frac{1}{l g} \int_{(s)} u w d\sigma = \frac{1}{g} \int_z^y u w dz$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE L'ÉCOULEMENT

La force de frottement par unité de surface du fluide sur le radier peut se mettre sous la forme :

$$\tau_0 = C_f \rho \frac{U^2}{2}$$

U désignant la valeur moyenne dans la section de la composante horizontale de la vitesse $U = Q/ly$ et C_f un coefficient de frottement qui, pour un écoulement hydrauliquement rugueux, ne dépend pas du nombre de REYNOLDS mais du rayon hydraulique égal à la hauteur d'eau y pour un canal rectangulaire très large :

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = \frac{C_f}{2 g} \frac{Q^2}{l^2 y^2}$$

En faisant intervenir le coefficient de CHÉZY, comme il est d'usage pour les écoulements à surface libre, $C = \sqrt{2 g / C_f}$, les équations différentielles de l'écoulement (3) et (6) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} M(x) &= \frac{y^2}{2} + \alpha \frac{Q^2}{g l^2 y} + K \frac{Q^2}{g l^2} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \\ \frac{dM}{dx} &= i y - \frac{Q^2}{C^2 l^2 y^2} \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} M(x) &= \frac{y^2}{2} + \frac{Q^2}{g l^2 y} + \frac{Q^2}{3 g l^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{3 g l^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ \frac{dM}{dx} &= i y - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^2} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

il vient :

$$y - z + \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{w^2}{g} (z, x) = \frac{p(z, x)}{\rho g}$$

tenant compte des expressions de u et w , on obtient :

$$\begin{aligned} L(x, z) &= \frac{Q^2}{g l^2 y} \frac{dy}{dx} \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= \left[\frac{Q^2}{g l^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{g l^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta + \\ &\quad + \frac{Q^2}{g l^2 y^4} z^2 F'^2\left(\frac{z}{y}\right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ &= \left[\frac{Q^2}{g l^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{g l^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \int_{z/y}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta \\ &\quad + \frac{w^2}{g} (z, x) \end{aligned}$$

on retombe sur la formule (5) donnant la valeur de la pression.

Nous nous placerons désormais dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses normales u dans une section.

Dans ces conditions :

$$F'\left(\frac{z}{y}\right) = 1$$

Les coefficients sans dimensions α et K prennent les valeurs suivantes :

$$\alpha = \int_0^1 F'^2(\lambda) d\lambda = 1$$

$$K = \int_0^1 d\lambda \int_{\lambda}^1 \beta F'^2(\beta) d\beta = \frac{1}{3}$$

Les équations (7) s'écrivent alors :

II. — AUTRE FORME DES ÉQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT

Nous obtiendrons une nouvelle forme des équations de l'écoulement permanent en appliquant le théorème de BERNOULLI généralisé à la portion du fluide comprise entre les sections (s) et (s') normales au radier, distantes de dx .

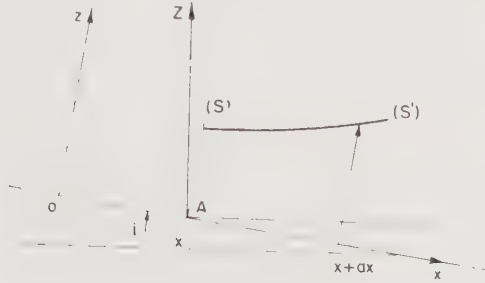


FIG. 2 bis

Dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses normales dans la section, on obtient :

$$\int \int_{(s)} \left(\frac{p}{\omega} + Z + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) u \, d\sigma - \int \int_{(s')} \left(\frac{p}{\omega} + Z + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) u \, d\sigma = -\frac{\tau_0}{\omega} u l \, dx$$

Z représentant la cote d'un point quelconque de la section (s) ou (s') par rapport au plan horizontal de référence passant par A,

Pour un point de la section (s'), on a :

$$Z = z \cos i - dx \sin i = z - i \, dx$$

et pour un point de la section (s) :

$$Z = z \cos i = z$$

Supposons u constant dans une section, nous divisons les deux membres de la relation par $l u y$ et nous posons :

$$H(x) = \frac{1}{y} \int_0^y \left(\frac{p}{\omega} + z + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) dz$$

l'équation précédente s'écrit :

$$H(x + dx) - H(x) = \left(i - \frac{\tau_0}{\omega y} \right) dx$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3}$$

Dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses normales, la composante transversale de la vitesse :

$$w = u \frac{z}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$u = U = \frac{Q}{ly}$$

En se reportant à l'équation (5), il vient de même :

$$\frac{p}{\omega} = y - z + \frac{y^2 - z^2}{2} \left[\frac{Q^2}{gl^2 y^3} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{gl^2 y^4} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

On obtient ainsi, par une intégration immédiate :

$$H(x) = \frac{1}{y} \int_0^y \left(\frac{p}{\omega} + z + \frac{u^2 + w^2}{2g} \right) dz = y + \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} + \frac{Q^2}{3gl^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{6gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

Les équations de l'écoulement permanent se mettent alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(x) = y + \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} + \frac{Q^2}{3gl^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{6gl^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ \frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{array} \right. \quad (9)$$

Les deux systèmes (8) et (9) sont manifestement équivalents car ils conduisent, pour la détermination de la ligne d'eau $y = y(x)$, à la même équation différentielle du troisième ordre.

Cette circonstance nous conduit à une remarque intéressante concernant les fonctions $H(x)$ et $M(x)$. La dérivation de ces deux fonctions fait apparaître la relation :

$$\frac{dM}{dx} = y \frac{dH}{dx}$$

soit :

$$\boxed{\frac{dM}{dH} = y}$$

identique à celle qui relie les deux fonctions M et H qui interviennent dans la théorie des écoulements graduellement variés. La fonction M et la charge spécifique H dans une section ne dé-

pendent alors que de la hauteur d'eau dans la section envisagée et se réduisent à :

$$H_1(y) = y + \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2}$$

$$M_1(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{Q^2}{g l^2 y}$$

En seconde approximation, H et M dépendent

non seulement de la hauteur d'eau, mais également de la pente et de la courbure de la ligne de remous dans la section envisagée.

Nous allons déduire de ces équations une étude des différentes formes de ligne de remous, ce qui nous permettra de mettre en évidence les cas où les hypothèses de base de la théorie des écoulements « graduellement variés » ne sont pas applicables.

III. — ÉTUDE DES LIGNES DE REMOUS

La détermination de ces lignes se ramène à l'étude des systèmes différentiels (8) ou (9).

Nous utiliserons le système (9) qui fait intervenir la charge spécifique $H(x)$, car son intégration conduit à une interprétation géométrique intéressante.

L'intégrale générale du système :

$$\begin{cases} H = y + \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2} + \frac{Q^2}{3 g l^2 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Q^2}{6 g l^2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ \frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{cases} \quad (9)$$

dépend de trois constantes arbitraires dont l'une est un paramètre de translation parallèle à l'axe Ox, puisque x n'intervient pas explicitement dans les équations.

On peut donc la mettre sous la forme :

$$H = H(x - c_1, c_2, c_3)$$

$$y = y[x - c_1, c_2, c_3]$$

Une intégrale quelconque non singulière de (9) peut donc être représentée dans le plan HOy par une courbe (C) définie paramétriquement en fonction de $t = x - c_1$ et dépendant de deux paramètres. Ces courbes (C) sont les courbes intégrales d'une équation différentielle du second ordre :

$$F\left(H, y, \frac{dH}{dy}, \frac{d^2 H}{dy^2}\right)$$

que nous formerons plus loin.

Nous commencerons par étudier les intégrales infiniment voisines d'une intégrale connue de (9) qui correspond au régime uniforme dans le canal.

La hauteur normale $y = y_0$, correspondant au

régime uniforme dans le canal, est la solution de l'équation :

$$i - \frac{Q^2}{c^2(y) l^2 y^3} = 0$$

qui satisfait à la relation classique de CHÉZY :

$$Q = C(y_0) l y_0 \sqrt{y_0 i}$$

(la hauteur d'eau y_0 représentant le rayon hydraulique pour un canal de grande largeur l).

Le point P du plan HOy de coordonnées :

$$\begin{cases} y = y_0 \\ H = y_0 + \frac{Q^2}{2 g l^2 y_0^2} \end{cases}$$

correspond manifestement à une solution du système (9) indépendante de x .

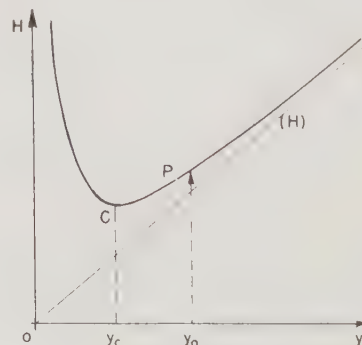


FIG. 3

Le point P est situé sur la courbe (H) d'équation :

$$H = y + \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2}$$

courbe classique dont le sommet C correspond à la hauteur critique :

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g l^2}}$$

La position du point P par rapport à C sur la courbe (H) définit la nature du régime dans le canal, fluvial si $y_0 > y_c$, torrentiel si $y_0 < y_c$.

La recherche des intégrales du système (9) asymptotiques à cette solution, c'est-à-dire telles que le point figuratif de la courbe (C) correspondante tende vers le point P lorsque x augmente indéfiniment soit par valeurs positives, soit par valeurs négatives, se rattache à un problème classique sur la « stabilité conditionnelle » résolu par POINCARÉ et LIAPOUNOFF.

Considérons en effet le système auxiliaire :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} = \psi(y) \\ \frac{Q^2}{3 gl^2} \frac{dz}{dx} = y \left[H + \frac{Q^2}{6 gl^2 y^2} z^2 - y - \frac{Q^2}{2 gl^2 y^2} \right] \\ = \varphi(y, z, H) \end{cases} \quad (10 a)$$

équivalent au système (9) et écrivons les « équations aux variations » de ce système correspondant à l'intégrale particulière :

$$z = 0 \quad y = y_0 \quad H = y_0 + \frac{Q^2}{2 gl y_0^2} = H_0$$

Ces équations s'écrivent en posant :

$$\begin{cases} H = H_0 + \xi \quad y = y_0 + \eta \quad z = \zeta \\ \frac{d\eta}{dx} = \zeta \\ \frac{d\xi}{dx} = \psi(y_0) \eta \\ \frac{Q^2}{3 gl^2} \frac{d\zeta}{dx} = \left(-y_0 + \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} \right) \eta + y_0 \xi \end{cases} \quad (11 a)$$

système linéaire et homogène dont l'intégration se ramène à celle de l'équation linéaire du troisième ordre :

$$\frac{Q^2}{3 gl^2} \frac{d^3 \eta}{dx^3} + \left(y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} \right) \frac{d\eta}{dx} = y_0 \psi(y_0) \eta \quad (12 a)$$

L'existence de solutions de (9) asymptotiques à $y = y_0$ est liée au signe des parties réelles de l'équation caractéristique de (12 a) qui s'écrit :

$$\frac{Q^2}{3 gl^2} m^3 + \left(y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} \right) m = y_0 \psi(y_0) \quad (13 a)$$

On est conduit, pour la discussion du signe et de la réalité des racines de (13 a) à envisa-

ger deux cas suivant le signe de la quantité $y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2}$.

$$\text{Premier cas : } y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} > 0$$

c'est-à-dire $y_0 > y_c$, cas du régime fluvial dans le canal.

Les racines de (13 a) sont les abscisses des points d'intersection de la cubique :

$$u = \frac{Q^2}{3 gl^2} m^3 + \left(y_0 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} \right) m$$

avec la droite d'ordonnée $u = y_0 \psi(y_0)$, $\psi(y)$ étant une fonction croissante de y : $\psi(y_0) > 0$.

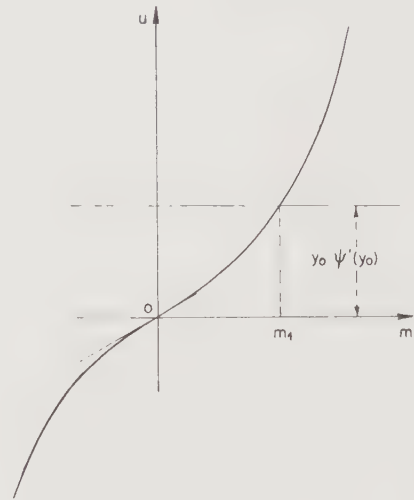


FIG. 4

L'examen de la figure 4 montre que (13) admet une seule racine réelle positive m_1 et deux racines imaginaires conjuguées :

$$m_2 = \alpha + \beta i \quad m_3 = \alpha - \beta i$$

De la relation $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ on tire d'ailleurs $\alpha = -\frac{m_1}{2} < 0$ qui montre que la partie réelle des racines imaginaires est négative.

Dans ces conditions, il existe une double infinité de solutions du système (9) asymptotiques à l'intégrale particulière $y = y_0$, $H = H_0$, lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives.

Les courbes (C) correspondantes du plan HOy dépendent d'une seule constante arbitraire et s'enroulent en spirale autour du point P.

En effet, η pour x très grand et positif est donné par l'expression :

$$\eta = c_2 e^{\alpha x} \sin \beta (x - c_1) \quad \text{où} \quad \alpha = -\frac{m_1}{2} < 0$$

en posant :

$$t = x - c_1$$

Il vient, pour t très grand :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = y_0 + c e^{-m_1 t/2} \sin \beta t \\ H = H_0 + \xi = H_0 + \frac{Q^2}{3 g l^2 y_0} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \left(1 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^3} \right) \eta \end{array} \right.$$

qui montrent que le point P (y_0, H_0) est un point asymptote. Il est d'ailleurs facile de montrer que lorsque x augmente indéfiniment, le point figuratif tourne autour de P dans le sens positif.

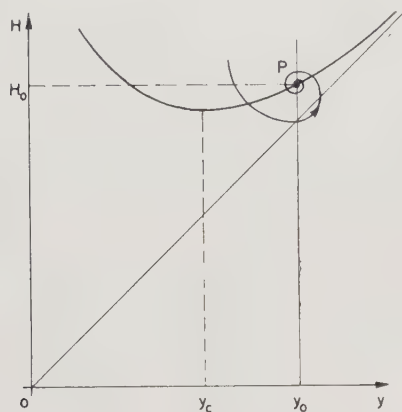


FIG. 5

Il existe également une simple infinité de solutions du système (9) asymptotiques à la solution $y = y_0$, $H = H_0$, lorsque x augmente indéfiniment par valeurs négatives. A ces solutions correspond dans le plan HOy une courbe (C) unique passant par le point P que nous désignerons par (C_0).

La forme de cette courbe sera précisée ultérieurement; nous nous bornerons pour le moment à étudier son allure au voisinage du point P.

Pour x augmentant indéfiniment par valeurs négatives, on a :

$$y = y_0 + c_1 e^{m_1 x}$$

$$H = H_0 + \xi$$

ou en tenant compte de (11) :

$$\frac{dH}{dx} = \psi'(y_0) \eta = \psi'(y_0) c_1 e^{m_1 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = m_1 c_1 e^{m_1 x}$$

on en déduit la pente de la tangente à C_0 au point d'arrêt P :

$$\frac{dH}{dy} = \frac{\psi'(y_0)}{m_1}$$

m_1 étant la racine réelle positive de l'équation (13), tenant compte de cette équation on peut écrire :

$$\frac{dH}{dy} = \frac{\psi'(y_0)}{m_1} = 1 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^3} + \frac{Q^2}{3 g l^2 y_0} m_1^2$$

La pente de la tangente en P à la courbe (H) ayant précisément pour valeur $1 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^3}$ on voit qu'elle est inférieure à la pente de la tangente à (C_0).

Il est intéressant de connaître la position de la courbe (C_0) par rapport à sa tangente au point P. Nous utiliserons à cet effet les dévelop-

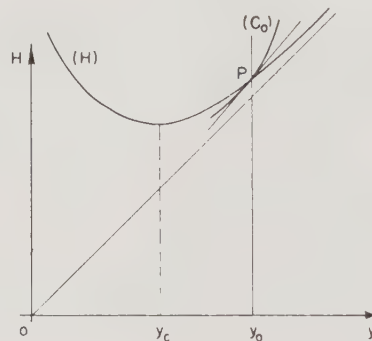


FIG. 6

pements en série utilisé par POINCARÉ et LIAPOUNOFF pour mettre en évidence le caractère asymptotique de certaines solutions, dans l'hypothèse où l'équation caractéristique admet des racines dont les parties réelles ne sont pas toutes de même signe.

Le système (10 a) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\eta}{dx} = \zeta$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = \psi'(y_0) \eta + \frac{1}{2} \psi''(y_0) \eta^2 + \dots$$

$$\frac{Q^2}{3 g l^2} \frac{d\zeta}{dx} = \left(\frac{Q^2}{g l^2 y_0^3} - y_0 \right) \eta + y_0 \zeta +$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(-2 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^3} \right) \eta^2 + 2 \eta \zeta + \frac{Q^2}{3 g l^2 y_0} \zeta^2 \right] + \dots$$

en posant comme précédemment :

$$H = H_0 + \xi \quad y = y_0 + \eta \quad z = \zeta$$

et en développant en série les fonctions $\psi(y)$ et $\varphi(H, y, z)$ au voisinage du point $H_0, y_0, 0$.

Posons :

$$u_1 = c_1 e^{m_1 x}$$

m_1 étant la racine positive de l'équation caractéristique (13 a) et proposons-nous de trouver des séries entières à coefficients constants, ordonnées suivant les puissances de u_1 :

$$\xi = \Sigma \alpha_n u_1^n$$

$$\eta = \Sigma \beta_n u_1^n$$

$$\zeta = \Sigma \gamma_n u_1^n$$

et satisfaisant formellement aux équations (10 a), ces séries commençant par des termes du premier degré en u_1 , puisque pour $u_1 = 0$, c'est-à-dire $x = -\infty$, on doit avoir :

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

En substituant les développements précédents dans les équations (10 a) et en écrivant qu'on obtient une identité, on est conduit, en tenant compte de la relation :

$$\frac{d}{dx} (u_1^n) = m_1 n u_1^{n-1}$$

à un système linéaire pour la détermination des coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, les seconds membres se déduisant par des additions et des multiplications des coefficients des séries (10 a) et des coefficients déjà déterminés des séries (14 a).

Les premiers termes α_1, β_1 et γ_1 sont solutions du système homogène :

$$m_1 \beta_1 = \gamma_1$$

$$m_1 \alpha_1 = \psi'(y_0) \beta_1$$

$$\frac{Q^2}{3 g l^2} m_1 \gamma_1 = \left(\frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} - y_0 \right) \beta_1 + y_0 \alpha_1$$

dont le déterminant est nul puisque m_1 est racine de l'équation caractéristique (13 a). Ce système admet donc une simple infinité de solutions :

$$\beta_1 = \lambda$$

$$\alpha_1 = \frac{\psi'(y_0)}{m_1} \lambda$$

$$\gamma_1 = m_1 \lambda$$

où λ est une constante arbitraire. On voit aussitôt que la constante λ , intervenant à la puissance n dans les termes $\alpha_n \beta_n \gamma_n$:

$$\alpha_n = K_n \lambda^n$$

peut être incorporée au coefficient c_1 qui intervient dans la relation :

$$u_1 = c_1 e^{m_1 x}$$

En effet :

$$\alpha_n u_1^n = K_n (\lambda c_1)^n e^{n m_1 x}$$

λ ne constitue donc pas une nouvelle constante arbitraire et on peut prendre $\lambda = 1$.

Il existe donc un développement en série unique (14 a) correspondant aux solutions du système (9) asymptotiques à la solution particulière $y = y_0$:

$$H = H_0 = y_0 + \frac{Q^2}{2 g l^2 y_0^2} \quad z = \frac{dy}{dx} = 0$$

Ces solutions dépendent d'une seule constante arbitraire c_1 qui est évidemment un paramètre de translation puisqu'on peut écrire :

$$c_1 e^{m_1 x} = e^{m_1 (x - x_0)}$$

La courbe (C_0) , qui représente toutes ces solutions dans le plan HOy , est définie, au voisinage du point P, par le développement :

$$H - H_0 = \xi = \Sigma \alpha_n u_1^n = \frac{\psi'(y_0)}{m_1} u_1 + \alpha_2 u_1^2 + \dots$$

$$y - y_0 = \eta = \Sigma \beta_n u_1^n = u_1 + \beta_2 u_1^2 + \dots$$

absolument convergent si la valeur absolue de c_1 est inférieure à une limite convenable.

La position de la courbe (C_0) par rapport à sa tangente en P dépend donc du signe de la quantité :

$$\alpha_2 - \beta_2 \frac{\psi'(y_0)}{m_1}$$

Nous avons déterminé α_2 et β_2 à l'aide des considérations précédentes. Nous avons admis dans le calcul que le coefficient $c(y)$ était peu variable et gardait la valeur $c(y_0)$ correspondant au régime uniforme, ce qui conduit à la relation :

$$\psi''(y_0) = - \frac{4}{y_0} \psi'(y_0)$$

Dans ces conditions on obtient, après des calculs assez longs et en tenant compte du fait que m_1 est racine de (13 a) :

$$\alpha_2 - \beta_2 \frac{\psi'(y_0)}{m_1} = \frac{Q^2 \psi'(y_0)}{2 g l^2 y_0^3} \times \frac{3 - 5 y_0^2 m_1^2}{(2 m_1)^3 \frac{Q^2}{3 g l^2} - (2 m_1) \left[\frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} - y_0 \right] - y_0 \psi'(y_0)}$$

le dénominateur est évidemment positif, car en posant :

$$F(m) = \frac{Q^2}{3 g l^2} m^3 - \left(\frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} - y_0 \right) m - y_0 \psi'(y_0)$$

on voit que :

$$F(m_1) = 0 \quad F(2 m_1) > 0$$

Le signe de $\alpha_2 - \beta_2 \frac{\psi'(y_0)}{m_1}$ est donc celui de la quantité $3 - 5 y_0^2 m_1^2$; or, l'équation caractéristique peut s'écrire en faisant intervenir la pente du canal i reliée à la hauteur normale par la formule :

$$i = \frac{Q^2}{c^2(y_0) l^2 y_0^3} = 0$$

et en prenant $\psi'(y_0) = \frac{3 Q^2}{c^2(y_0) l^2 y_0^4}$ (on néglige la variation de $c(y)$:

$$\frac{c^2(y_0) i}{3 g} y_0^3 m^3 + \left[1 - \frac{c^2(y_0) i}{g} \right] y_0 m = 3 i$$

La condition $3 - 5 y_0^2 m_1^2 > 0$ se traduit alors par l'inégalité :

$$i < \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{3 + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{c^2(y_0)}{g}}$$

condition qui est pratiquement toujours remplie dans l'hypothèse que nous avons faite d'une pente suffisamment faible pour qu'on puisse poser :

$$\cos i = 1 \quad \sin i = i$$

REMARQUE. — La même méthode pourrait être utilisée pour la détermination des solutions asymptotiques au régime uniforme pour $x = +\infty$ en utilisant des développements en séries doubles suivant les puissances croissantes de :

$$u_2 = c_2 e^{m_2 x} \quad u_3 = c_3 e^{m_3 x}$$

m_2 et m_3 étant les racines réelles ou complexes, à partie réelle négative de l'équation (13 a).

On mettrait ainsi en évidence une double infinité de solution du système (9) asymptotiques à la solution $y = y_0$, $H = H_0$ auxquelles correspondrait dans le plan HOy une simple infinité de courbes (C).

Deuxième cas : $y_0 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} < 0$

c'est-à-dire $y_1 < y_c$, cas du régime torrentiel dans le canal.

La cubique d'équation :

$$u = \frac{Q^2}{3 g l^2} m^3 + \left(y_0 - \frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} \right) m$$

est représentée sur la figure 7.

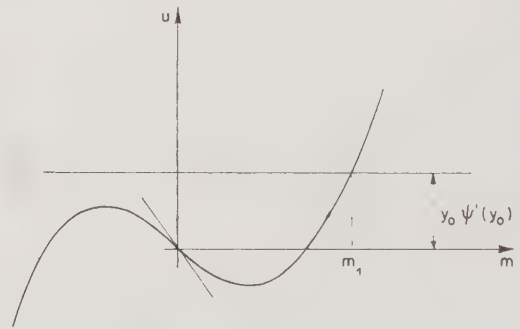


FIG. 7

Si la hauteur normale y_0 n'est pas trop petite, c'est-à-dire si la pente du canal n'est pas trop forte, l'équation (13) admet encore une seule racine réelle positive m_1 et deux racines imaginaires dont la partie réelle est négative, m_2 et m_3 .

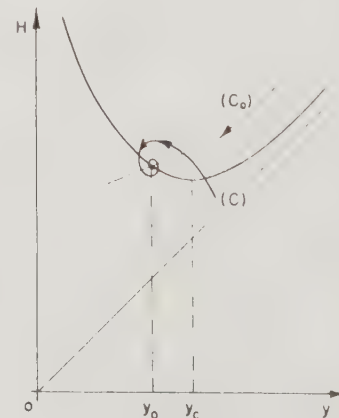


FIG. 8

Les résultats sont identiques à ceux du premier cas, l'allure des courbes (C) admettant le point P pour point asymptote et celle de la courbe (C₀) passant par P est précisée par la figure 8.

Mais si y_0 est suffisamment petit, c'est-à-dire si la pente du canal est très forte, l'équation (13) admet trois racines réelles dont une positive m_1 et deux négatives m_2 et m_3 .

Le résultat reste inchangé en ce qui concerne la courbe (C₀), mais les courbes (C) du plan HOy correspondant à la double infinité de solution du système (9) asymptotiques à l'intégrale particulière $y = y_0$, $H = H_0$, lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives, n'admettent plus le point P comme point asymptote. Elles passent toutes par le point P et elles sont tangentes en ce point. Déterminons la pente de cette tangente.

Pour x positif et très grand, (C) est défini par les équations paramétriques :

$$y = y_0 + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x}$$

$$H = H_0 + \psi(y_0) \left[\frac{c_2}{m_2} e^{m_2 x} + \frac{c_3}{m_3} e^{m_3 x} \right]$$

$$\frac{dH}{dy} = \psi(y_0) \frac{c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x}}{m_2 c_2 e^{m_2 x} + c_3 m_3 e^{m_3 x}}$$

m_2 et m_3 étant négatifs, désignons par m_3 la racine la plus grande en valeur absolue, on a :

$$\frac{dH}{dy} = \psi(y_0) \frac{c_2 + c_3 e^{(m_3 - m_2)x}}{m_2 c_2 + m_3 c_3 e^{(m_3 - m_2)x}}$$

La pente de la tangente à (C) en P s'obtient en faisant $x = +\infty$; comme $m_3 - m_2 < 0$, il vient :

$$\frac{dH}{dy} = \frac{\psi(y_0)}{m_2}$$

m_2 étant la racine négative de (13) dont la valeur absolue est la plus faible. Sa position par rapport à la tangente à (H) au point P est précisée sur la figure 9.

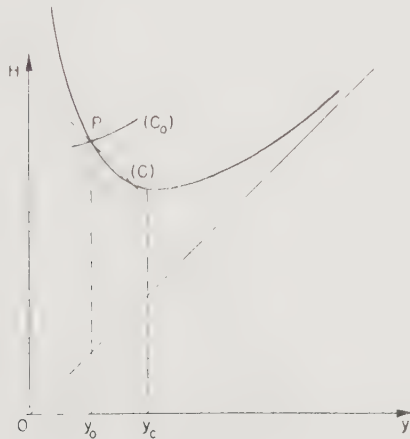


FIG. 9

TRACÉ DES COURBES (C)

Le tracé des courbes (C) et l'étude de leurs points à l'infini se déduisent aisément de la forme de l'équation différentielle du second ordre (E) dont elles sont les courbes intégrales.

Cette équation s'obtient à partir du système (9) :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Q^2}{gl^2} \left[\frac{1}{3y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{6y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] &= H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} \\ \frac{dH}{dx} &= i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{aligned} \right.$$

Multiplions les deux membres de la première équation par dy/dx , cette équation s'écrit :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2}$$

ou, en tenant compte de la deuxième équation :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \right)^2 \left(\frac{dy}{dH} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2}$$

En intégrant, on aboutit à l'équation intégrale-différentielle :

$$\frac{Q^2}{6gl^2 y} \left(i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \right)^2 \left(\frac{dy}{dH} \right)^2 = \int_{y_1}^y \left(H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} \right) dy + \frac{Q^2}{6gl^2 y_1} \left(i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y_1^3} \right)^2 \left(\frac{dy}{dH} \right)_{y=y_1}^2 \quad (E)$$

où l'intégrale simple possède une interprétation géométrique évidente.

C'est l'aire comprise entre les courbes (C) et (H) et les droites d'abscisses y_1 et y .

Il est facile d'en conclure que, quand y augmente indéfiniment, les courbes (C) sont asymptotes à la courbe (H).

En effet, lorsque y tend vers $+\infty$, dy/dH est

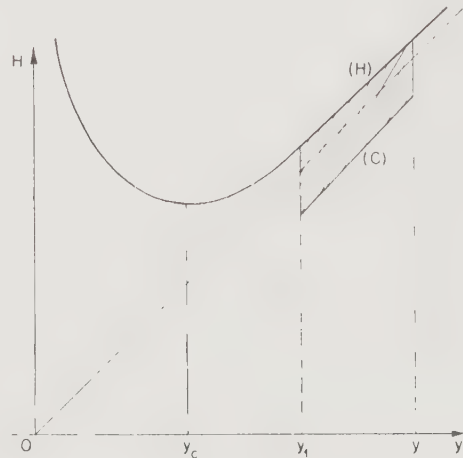


FIG. 10

positif et limité supérieurement, sinon le deuxième membre de l'équation (E) serait négatif pour y suffisamment grand, ce qui est impossible, le premier membre étant positif.

Dans ces conditions, le premier membre de (E) tend vers 0 et l'intégrale :

$$\int_{y_0}^y \left(H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} \right) dy$$

tend vers une limite finie négative lorsque y tend vers $+\infty$.

La quantité sous le signe somme tend donc vers 0, ce qui montre que (C) est asymptote à (H).

La courbe (C) $y = y(x)$ $H = H(x)$ étant définie paramétriquement en fonction de x , l'équation :

$$\frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \quad i > 0$$

montre que le point à l'infini de (C) s'obtient lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives, exception faite des courbes (C) particulières qui admettent le point P pour point asymptote.

Le point à l'infini dans la direction Oy est d'ailleurs un point singulier du système différentiel (9). L'étude des intégrales au voisinage de ce point va nous permettre de préciser l'allure des courbes (C).

Le système (9) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{z^2}{y} \right] &= H - y - \frac{\lambda}{2gl^2 y^2} \\ z \frac{dH}{dy} &= i - \frac{\lambda}{c^2 l^2 y^3} \end{aligned} \quad (10)$$

où on a posé :

$$\lambda = Q^2 \quad z = \frac{dy}{dx}$$

système qui définit les deux fonctions :

$$z = \frac{dy}{dx} = z(y, \lambda) \quad H = H(y, \lambda)$$

de la variable y , ces deux fonctions dépendant en outre de deux constantes arbitraires.

Pour $\lambda = 0$, la solution du système (10) est unique et se réduit à :

$$\begin{cases} H = y \\ z = i \end{cases}$$

L'étude des solutions du système (10) au voisinage de $\lambda = 0$ ne peut se faire par la méthode classique des équations aux variations, car $dz/dy = f(H, z, y, \lambda)$ n'est pas une fonction continue de λ pour $\lambda = 0$.

Il existe une solution et une seule du système (10) représentée par deux fonctions holomorphes de λ au voisinage de $\lambda = 0$. Ces fonctions $z = z_1(y, \lambda)$, $H = H_1(y, \lambda)$ sont, pour λ suffisamment petit, développables en série entière de λ de la forme :

$$z_1(y, \lambda) = i + \lambda \xi_1(y) + \dots + \lambda^n \xi_n(y) + \dots$$

$$H_1(y, \lambda) = y + \lambda \eta_1(y) + \dots + \lambda^n \eta_n(y) + \dots$$

En écrivant que ces développements satisfont formellement aux équations (10), on est conduit aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} \eta_n(y) = \frac{1}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \sum_{p=0}^{n-1} \xi_p(y) \xi_{n-p-1}(y) \right] \\ \xi_n(y) = - \sum_{p=0}^{n-1} \xi_p(y) \frac{d}{dy} \eta_{n-p}(y) \end{cases} \quad (11)$$

valables pour $n > 1$ et où $\xi_0 = i$ $\eta_0(y) = y$;

quant aux valeurs de ξ_1 et η_1 , elles sont données par :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2gl^2 y^2} \left(1 - \frac{i^2}{3} \right) = \frac{b_1}{gl^2 y^2} \\ \xi_1 &= \frac{1}{gl^2 y^3} \left[i - \frac{i^3}{3} - \frac{g}{c^2} \right] \end{aligned}$$

Si on suppose que le coefficient de CHÉZY c est indépendant de y , les développements peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} z_1(y, Q^2) = i + a_1 \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots + a_n \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots \\ H_1(y, Q^2) = y \left[1 + b_1 \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots + b_n \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots \right] \end{cases} \quad (12)$$

où a_n et b_n sont des coefficients sans dimensions indépendants de y avec :

$$\begin{aligned} a_0 &= i & b_0 &= 1 \\ a_1 &= i - \frac{i^3}{3} - \frac{g}{c^2} & b_1 &= \frac{1}{2} - \frac{i^2}{6} \end{aligned}$$

a_n et b_n étant donnés pour $n > 1$ par les relations récurrentes :

$$b_n = - \frac{3n}{6} - 2 \sum_{p=0}^{n-1} a_p a_{n-p-1}$$

$$a_n = \sum_{p=0}^{n-1} (3n - 3p - 1) a_p b_{n-p}$$

Ces formules ne sont plus valables si le coefficient de CHÉZY c est fonction de y . Les développements précédents peuvent encore se mettre sous la forme (12), mais a_n et b_n dépendent alors de y . De toute façon, leur convergence est assurée si $\frac{Q^2}{gl^2 y^3}$ est inférieur à une limite convenable.

Toutes les autres solutions du système (10) sont, nous l'avons vu, asymptotiques à cette solution particulière lorsque y augmente indéfiniment par valeurs positives.

Pour l'étude de ces solutions infiniment voisines, on est conduit au changement de fonctions :

$$H(y) = H_1(y) + \eta(y)$$

$$z(y) = z_1(y) + \xi(y)$$

ξ et η sont solutions du système :

$$\begin{cases} (z_1 + \xi) \frac{d\eta}{dy} + \frac{dH_1}{dy} \xi = 0 \\ \frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{\xi}{y} (\xi + 2z_1) \right] = \eta \end{cases} \quad (13)$$

qui admet la solution particulière $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Nous nous proposons de développer les intégrales de (13) suivant les puissances des valeurs initiales ξ_0 et η_0 , qui correspondent à $y = y_0$.

Posons :

$$\xi = \sum \alpha_{mn}(y) \xi_0^m \eta_0^n \quad \eta = \sum \beta_{mn}(y) \xi_0^m \eta_0^n$$

En écrivant que ces développements satisfont identiquement à (13), on voit que les coefficients $[\alpha_{10}(y), \beta_{10}(y)]$ et $(\alpha_{01}, \beta_{01})$ forment deux systèmes de solutions des équations aux variations, déterminés respectivement par les conditions initiales $\alpha_{10}(y_0) = 1$, $\beta_{10}(y_0) = 0$ et $\alpha_{01}(y_0) = 0$, $\beta_{01}(y_0) = 1$, les coefficients $\alpha_{mn}(y)$, $\beta_{mn}(y)$ étant déterminés de proche en proche, pour $m+n > 1$, par des systèmes d'équations linéaires avec les conditions initiales $\alpha_{mn}(y_0) = 0$, $\beta_{mn}(y_0) = 0$. Les séries ainsi obtenues seront certainement convergentes pour $y > y_0$ pourvu que les valeurs absolues de η_0 et ξ_0 soient inférieures à un nombre positif assez petit.

Les équations aux variations du système (13),

relatives à la solution particulière $\xi = 0$, $\eta = 0$, s'écrivent :

$$\begin{cases} z_1 \frac{d\eta}{dy} + \frac{dH_1}{dy} \xi = 0 \\ \frac{Q^2}{3gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{z_1}{y} \xi \right] = \eta \end{cases} \quad (14)$$

système linéaire et homogène conformément à la théorie.

On en déduit que β_{10} et β_{01} sont deux solutions particulières de l'équation linéaire et homogène du second ordre.

$$\frac{Q^2}{3gl^2} \frac{d}{dy} \left[K(y) \frac{d\eta}{dy} \right] + \eta = 0 \quad (15)$$

où :

$$K(y) = \frac{z_1^2(y)}{y \frac{dH_1}{dy}}$$

satisfaisant aux conditions initiales :

$$\beta_{01}(y_0) = 1, \quad \frac{d\beta_{01}}{dy}(y_0) = 0 :$$

$$\beta_{10}(y_0) = 0 \quad \frac{d\beta_{10}}{dy}(y_0) = - \frac{1}{z_1(y_0)} \frac{dH_1}{dy}(y_0)$$

Si la valeur initiale $y_0^{(*)}$ est suffisamment grande, $K(y)$ est, pour $y > y_0$, une fonction continue de y , positive, qui tend vers 0 pour y infini (cf. éq. 12); il est donc possible de choisir un nombre positif A tel que $K(y) < A$, quel que soit $y > y_0$.

Dans ces conditions, d'après le théorème de STURM, une intégrale de (15) a au moins une racine comprise entre deux racines consécutives d'une solution de l'équation :

$$\frac{Q^2}{3gl^2} A \frac{d^2\eta}{dy^2} + \eta = 0$$

dont les intégrales admettent une infinité de racines supérieures à y_0 .

Il en est donc de même des intégrales de (15) qui sont de plus asymptotiques à la solution $\eta = 0$, la forme même de l'équation (15) montrant que l'intégrale :

$$\int_{y_0}^{\infty} \eta(y) dy$$

a un sens.

On en déduit que toutes les courbes intégrales (C) d'équation $H = H(y)$, solutions du sys-

(*) Ne pas confondre y_0 avec la hauteur normale.

tème (10), coupent une infinité de fois la courbe intégrale particulière (C_1) d'équation :

$$H = H_1(y) = y \left[1 + b_1 \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots \right]$$

à laquelle elles sont asymptotes.

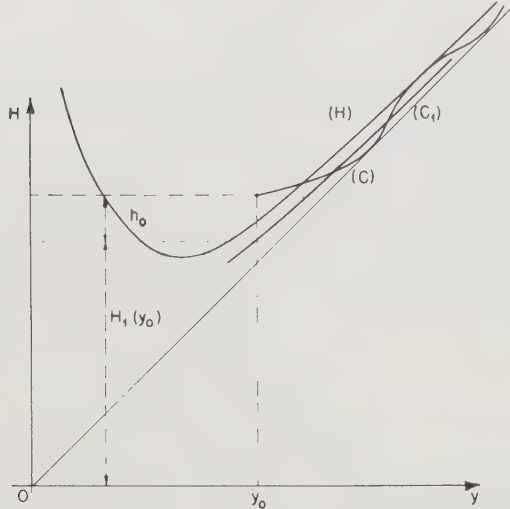


FIG. 11

Cette analyse permet de montrer que toutes les courbes de remous, à l'exception de celles qui tendent vers le régime uniforme lorsque x tend vers $+\infty$, admettent une asymptote horizontale lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives.

En effet, pour y suffisamment grand, $z = \frac{dy}{dx}$ peut être défini par le développement :

$$\frac{dy}{dx} = i + a_1 \frac{Q^2}{gl^2 y^3} + \dots + a_n \left(\frac{Q^2}{gl^2 y^3} \right)^n + \dots + \Sigma \alpha_{mn}(y) \xi_0^m \eta_0^n \quad (16)$$

série uniformément convergente de y pour y assez grand,

Les intégrales $\int_{y_0}^{\infty} \alpha_{mn}(y) dy$ ayant un sens, les courbes $y = y(x)$, intégrales de l'équation à variables séparées (16), admettent une asymptote horizontale d'équation $y = ix + c$ lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives.

POINTS DE COURBES (C) OU LA TANGENTE EST PARALLÈLE AUX AXES DE COORDONNÉES

Les courbes (C) étant définies paramétriquement en fonction de x , les points de ces courbes, où la tangente est parallèle à Ox , correspondent à $dH/dx = 0$; la deuxième équation du système (9) montre que les points se trouvent tous sur la droite d'équation $y = y_0$, à l'exception du point P où cette droite rencontre la courbe (H), (y_0 : hauteur normale).

Quant aux points de (C), où la tangente est parallèle à OH , l'examen de la première équation de (9), mise sous la forme :

$$\frac{Q^2}{6 gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{gl^2 y^3}$$

conduit à la propriété suivante :

L'aire comprise entre la courbe (H), une courbe (C) et deux tangentes à (C) parallèles à OH est nulle; l'équation :

$$\frac{Q^2}{gl^2} \left[\frac{1}{3 y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{6 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2 gl^2 y^2}$$

montre également qu'en un point où la tangente est parallèle à OH , le sens de la concavité dépend de la position du point par rapport à la courbe H (voir figure 12).

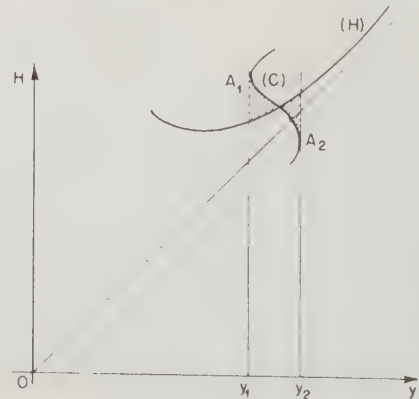


FIG. 12

Les courbes (C) peuvent posséder des points de rebroussement; en un tel point, on a à la fois :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \frac{dH}{dx} = 0$$

Ces points se trouvent donc sur la droite $y = y_0$ (y_0 étant la hauteur normale). La pente de la tangente au point de rebroussement est :

$$m = \frac{\frac{d^2H}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

comme $\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{d}{dy} \left[\frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \right] \frac{dy}{dx} = 0$

cette pente est nulle, sauf si en ce point on a également $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, mais on a alors

$$H = y + \frac{Q^2}{2gl^2 y^2}$$

et le point coïncide avec le point P d'intersection de la courbe (H) et de la droite $y = y_0$.

L'étude des courbes (C) passant par ce point a déjà été faite.

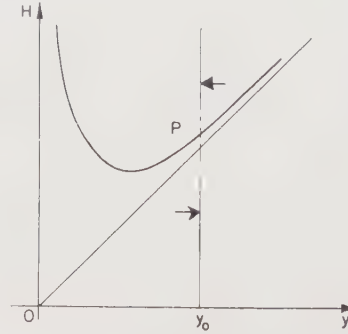


FIG. 13

Les résultats précédents vont nous permettre de déduire du tracé des courbes (C) les lignes de remous correspondant aux diverses conditions aux limites.

IV. — DÉTERMINATION DES LIGNES DE REMOUS

POSITION DU PROBLÈME

Considérons un canal de section rectangulaire de grande largeur, constitué de différentes portions de même largeur mais de pentes différentes. A l'amont et à l'aval, le canal peut soit s'étendre à l'infini, soit communiquer avec un réservoir dont on connaît la cote du plan d'eau au-dessus du radier.

Dans une portion quelconque de pente i , la charge H et la hauteur d'eau y au-dessus du radier satisfont au système différentiel (9) correspondant à la valeur i de la pente. Pour un débit Q donné, la détermination de la ligne d'eau

nécessite la connaissance de trois conditions particulières, par exemple les conditions de CAUCHY au point d'abscisse $x = x_0$:

$$x = x_0 \left[y(x_0), H(x_0), \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} \right]$$

En fait, le problème sera déterminé par les conditions particulières aux extrémités de la portion envisagée. Avant d'examiner les conditions aux limites dans le cas général, nous commencerons par étudier quelques cas particuliers.

1. — Canal de pente uniforme i , s'étendant à l'infini à l'amont et débouchant à l'aval dans un réservoir B dont on connaît la cote y_1 du plan d'eau au-dessus du radier.

Nous prendrons pour origine des coordonnées O l'extrémité aval du canal.

Le canal s'étendant à l'infini à l'amont, le régime uniforme doit être réalisé lorsque x augmente indéfiniment par valeurs négatives. Les solutions du système (9) qui satisfont à cette condition sont, nous l'avons vu, représentées dans le plan HOy par une courbe (C) unique (C_0) d'équation $H = H_0(y)$.

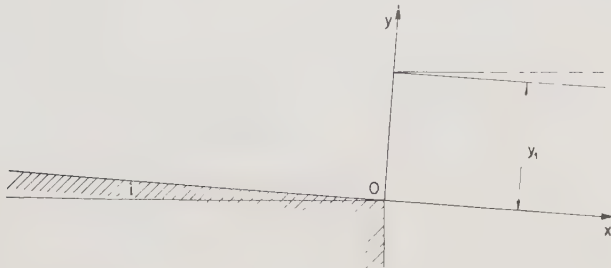


FIG. 14

La deuxième équation de (9) montre que les lignes de remous correspondantes sont les solutions de l'équation différentielle du premier ordre à variables séparées :

$$\frac{dH_0}{dy} \frac{dy}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \quad (16)$$

La ligne d'eau cherchée est la solution particulière qui satisfait aux conditions de CAUCHY ($x = 0$ $y = y_1$).

Notons que les courbes intégrales de (16) se déduisent toutes de l'une d'entre elles par une translation parallèle à Ox . Le tracé d'une quelconque d'entre elles se déduit de la courbe (C_0) du plan HOy .

Deux cas sont à envisager suivant que le régime est fluvial ou torrentiel dans le canal.

a) RÉGIME FLUVIAL.

La hauteur normale y_0 est supérieure à la hauteur critique y_c . La courbe (C_0) passe, nous l'avons vu, par le point P d'intersection de la courbe (H) d'équation $H = y + Q^2/(2gl^2y^2)$ et de la parallèle à OH d'abscisse $y = y_0$, sa tangente en ce point ayant pour valeur :

$$\frac{dH}{dy} = \frac{\psi'(y_0)}{m_1} = 1 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^3} + \frac{Q^2}{3gl^2 y_0} m_1^2$$

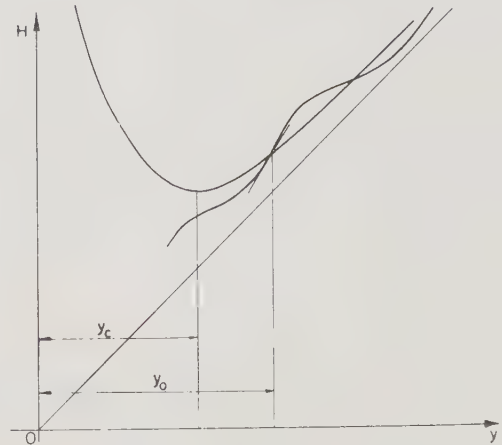


FIG. 15

m_1 étant la racine réelle positive de l'équation :

$$\frac{Q^2}{3gl^2 y_0} m_1^3 + \left(1 - \frac{Q^2}{gl^2 y_0^3}\right) m_1 = \psi'(y_0)$$

et :

$$\psi(y) = i - \frac{Q^2}{c^2(y) l^2 y^3}$$

(C_0) est, comme toutes les courbes (C) , asymptote à (H) et elle recoupe une infinité de fois la courbe intégrale particulière (C_1) du système (10) d'équation $H = H_1(y)$.

Le tracé de (C_0) s'en déduit. Sur cette courbe, y et H sont définis paramétriquement en fonction de x , le point P étant atteint, nous l'avons vu, pour $x = -\infty$ et le point à l'infini pour $x = +\infty$. Nous avons également démontré que toutes les courbes de remous possédaient une asymptote horizontale.



FIG. 16

La branche de (C_0) , située à gauche de P , est située tout entière au-dessous de (H) . L'étude du point singulier $y = 0$ du système (9) montrerait que lorsque y tend vers 0, H tend vers $-\infty$. Cette branche correspond au cas où la hauteur d'eau dans le réservoir aval B est inférieure à la hauteur du régime uniforme y_0 .



FIG. 17

b) RÉGIME TORRENTIEL.

La hauteur normale y_0 est inférieure à la hauteur critique y_c .

Dans ce cas, la courbe (C_0) possède un certain nombre de points où la tangente est parallèle à OH.

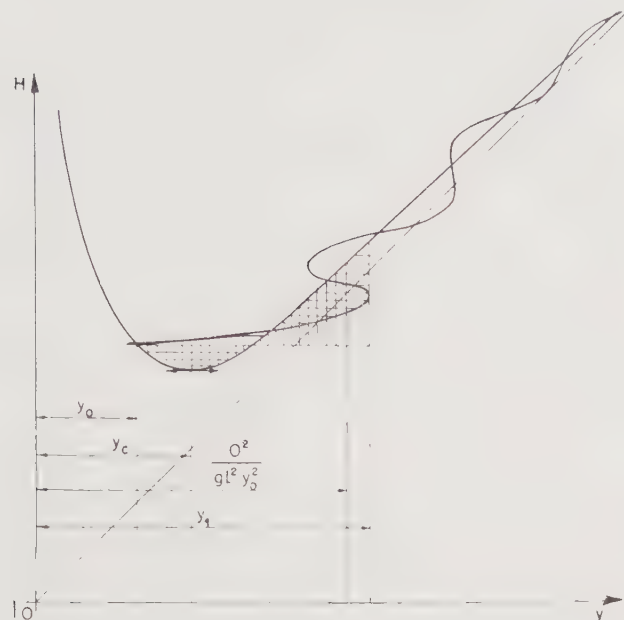


FIG. 18

Si y_1 désigne l'abscisse du premier de ces points (fig. 18), la première équation de (9) mise sous la forme :

$$\frac{Q^2}{6 g l^2 y} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2}$$

conduit, en tenant compte de : $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=y_0} = 0$

à la relation :

$$\int_{y_0}^{y_1} \left[H(y) - y - \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2} \right] dy = 0$$

dont l'interprétation géométrique est évidente (aires hachurées horizontalement égales).

On obtient un renseignement plus précis sur la valeur de y_1 et sur la forme de la courbe de remous en négligeant la variation de H lorsque y croît de y_0 à y_1 , cette variation étant liée à x par la deuxième équation de (9) :

$$\frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3}$$

Intégrons l'équation :

$$\frac{Q^2}{6 g l^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2}$$

en admettant que H garde sa valeur pour :

$$y = y_0 \quad H = H_0 = y_0 + \frac{Q^2}{2 g l^2 y_0^2}$$

il vient :

$$\frac{Q^2}{6 g l^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = H_0 y - \frac{y^2}{2} + \frac{Q^2}{2 g l^2 y} + C$$

la constante arbitraire étant déterminée par la condition $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=y_0} = 0$.

d'où :

$$C = -\frac{y_0^2}{2} - \frac{Q^2}{g l^2 y_0}$$

L'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{Q^2}{3 g l^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - y_0)^2 \left[\frac{Q^2}{g l^2 y_0^2} - y \right] \quad (17)$$

Les courbes intégrales de cette équation du premier ordre se déduisent toutes de l'une d'entre elles (S) par une translation parallèle à l'axe Ox. La forme de (S) est précisée sur la figure (19).

y est compris entre y_0 et $Q^2/g l^2 y_0^2$. Le deuxième membre de (17) devant être positif, il n'existe une courbe (S) réelle asymptote à $y=y_0$ que si :

$$y_0 < \frac{Q^2}{g l^2 y_0^2}, \text{ c'est-à-dire } y_0 < \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g l^2}} = y_c$$

qui est précisément la condition du régime torrentiel.

Dans le plan HOy, (S) est représentée par le segment de la droite :

$$H - H_0 = y_0 + \frac{Q^2}{2 g l^2 y_0^2}$$

compris entre les points d'abscisse :

$$y = y_0 \quad y = \frac{Q^2}{g l^2 y_0^2}$$

D'après une remarque déjà faite, les aires hachurées verticalement sur la figure 18 sont égales.

L'examen de cette figure montre immédiatement que l'ordonnée y_1 du premier point de la courbe de remous, où la tangente est parallèle à Ox, est supérieure à $Q^2/g l^2 y_0^2$.

Par ailleurs, les courbes de remous (R) et (S) satisfont respectivement aux deux équations :

$$(R) \frac{Q^2}{6 g l^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \int_{y_0}^y \left[H(u) - u - \frac{Q^2}{2 g l^2 u^2} \right] du$$

$$(S) \frac{Q^2}{6 g l^2 y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \int_{y_0}^y \left[H_0 - u - \frac{Q^2}{2 g l^2 u^2} \right] du$$

comme pour $y > y_0$ $H(u) > H_0$, on en déduit qu'en deux points de même ordonnée la pente de (R) est supérieure à celle de (S) [conferes fig. 19].

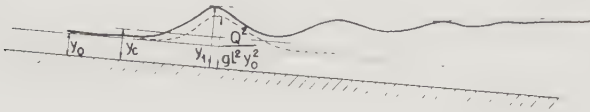


FIG. 19

De ces considérations on déduit aisément le tracé de la courbe (C_0) et de la ligne de remous (R). Nos équations traduisent ainsi un fait expérimental classique concernant le passage de l'écoulement torrentiel à l'écoulement fluvial et connu sous le nom de ressaut ondulé (undulated jump).

Ce phénomène est caractérisé par une remontée relativement progressive de la surface libre suivie de vagues à emplacement fixe dont la hauteur va en décroissant.

Il est observé lorsque la hauteur normale y_0 , tout en étant inférieure à la hauteur critique y_c , ne lui est pas trop inférieure.

Pour une valeur suffisamment faible du rapport y_0/y_c , la première onde devient instable et sa partie supérieure commence à déferler



FIG. 20



FIG. 21

(fig. 20), ce qui tend à amortir les ondulations suivantes. Pour y_0/y_c assez petit, ces dernières finissent par disparaître entièrement et le déferlement, accompagné de bouillonnements intenses, vient recouvrir la partie la plus basse de la ligne d'eau, le phénomène prenant l'allure de la figure 21. C'est le ressaut déferlant (direct jump). Les particules d'eau engagées dans le tourbillon à axe horizontal qui constitue la partie défer-

lante sont animées d'un mouvement de rotation et ne participent pas au mouvement de translation du fluide.

Cette discontinuité de la surface libre et la perte de charge singulière qu'elle provoque rendent dans ce cas les équations (9) inapplicables.

Mais la localisation du ressaut permet alors d'appliquer le théorème des quantités de mouvement entre les sections (1) et (2) en négligeant l'inclinaison du radier du canal et les forces de frottement entre les deux sections. Ceci nous conduit à écrire que la fonction $M(x)$ a la même valeur dans les sections (1) et (2), c'est-à-dire à la théorie classique du ressaut, en admettant pour M la valeur de première approximation :

$$M = \frac{y^2}{2} + \frac{Q^2}{g l y}$$

Cette approximation est rigoureuse dans (1)

$$\text{où } \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

THÉORIE DU DÉFERLEMENT.

Considérons une particule fluide située sur la surface libre. Elle est en équilibre sur sa trajectoire sous l'action des forces extérieures (pesanteur), des forces d'inertie et des forces de liaison qui constituent la poussée du milieu environnant. Pour que la particule ne tende pas à quitter la surface libre, il faut que la composante normale à la trajectoire de cette poussée soit dirigée vers l'extérieur du fluide.

La valeur de cette composante sur la normale extérieure :

$$R = m \left(g \cos \alpha + \frac{V^2}{\rho} \right)$$

α étant l'angle de la normale avec la verticale :

$$\cos \alpha = (1 + y'^2)^{-1/2}$$

ρ rayon de courbure de la trajectoire :

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

V vitesse de la particule :

$$V^2 = u^2 + w^2 = u^2 (1 + y'^2) = \frac{Q^2}{l^2 y^2} (1 + y'^2)$$

d'où :

$$R = m g (1 + y'^2)^{-1/2} \left[1 + \frac{Q^2 y''}{g l^2 y^2} \right]$$

on en déduit la condition de non déferlement :

$$\frac{Q^2}{gl^2 y^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + 1 > 0$$

En première approximation, examinons comment se traduit cette condition, lorsqu'on confond la première onde avec la courbe (S), définie par l'équation différentielle :

$$\frac{Q^2}{3 gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - y_0)^2 \left(\frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} - y \right) \quad (17)$$

il vient :

$$\frac{Q^2}{gl^2 y^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{2} \frac{(y - y_0) \left[2 \frac{Q^2}{l^2} + g y_0^3 - 3 g y_0^2 y \right]}{g y_0^2 y}$$

posons :

$$\lambda = \frac{Q^2}{gl^2 y_0^3} \quad u = \frac{y}{y_0}$$

En fonction de ces variables sans dimensions :

$$\frac{Q^2}{gl^2 y^2} \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ a pour expression :}$$

$$\frac{Q^2}{gl^2 y^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{2} \frac{(u - 1) (2 \lambda + 1 - 3 u)}{u^2}$$

dont nous étudierons la variation lorsque y croît de y_0 à $\frac{Q^2}{gl^2 y_0^2}$, c'est-à-dire lorsque u croît de 1 à λ .

2. — Canal constitué de deux portions de pente différentes.

Le canal s'étend à l'infini à l'amont, à l'aval il peut soit s'étendre à l'infini, soit déboucher dans un réservoir (B) où le plan d'eau est fixe.

Nous supposons la pente faible dans la portion amont et forte dans la portion aval.

Soient i_1 et i_2 les pentes respectives des por-

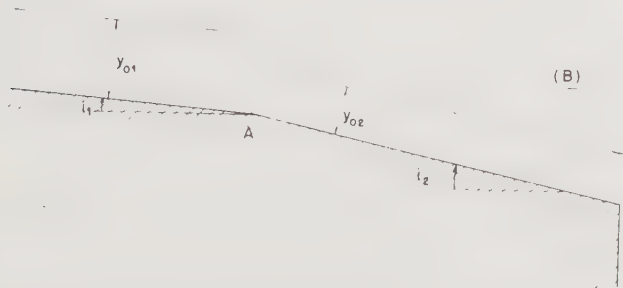


FIG. 22

La valeur minima de cette fonction dans cet intervalle s'obtient pour $u = \lambda$, c'est-à-dire :

$$y = \frac{Q^2}{gl^2 y_0^2}$$

et son expression est :

$$- \frac{3}{2} \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2}$$

Le déferlement commence donc à apparaître dans la partie supérieure de la première onde.

La condition de non-déferlement s'écrit :

$$- \frac{3}{2} \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2} + 1 > 0$$

soit :

$$\frac{1}{\lambda} > 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

comme :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{gl^2 y_0^2}{Q^2} = \left(\frac{y_0}{y_c} \right)^2$$

la condition précédente s'écrit :

$$\frac{y_0}{y_c} > \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}} = 0,57$$

En pratique, le déferlement apparaît avant que y_0/y_c soit inférieur à 0,57, l'influence du frottement de l'air sur la surface libre jouant à cet égard un rôle particulier. Un facteur important d'instabilité est également constitué par le fait que l'écoulement n'est permanent qu'en moyenne, la surface libre oscillant autour d'une position moyenne. Les efforts dynamiques qui en résultent sur la particule d'eau contribuent à son instabilité.

tions amont et aval; désignons par y_{01} et y_{02} les hauteurs normales correspondantes :

$$y_{02} < y_c < y_{01} \quad i_2 > i_1$$

Dans chaque portion de canal, les lignes de remous (R_1) et (R_2) vérifient le système (9) respectivement pour les valeurs i_1 et i_2 du paramètre i .

Dans le plan HOy (fig. 23), les deux lignes de remous sont représentées respectivement par deux courbes (C_1) et (C_2), solutions du système (10) :

$$\begin{cases} \frac{Q^2}{6 gl^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{z^2}{y} \right) = H - y - \frac{Q^2}{2 gl^2 y^2} \\ z \frac{dH}{dy} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{cases} \quad (10)$$

pour les valeurs respectives i_1 et i_2 de i .

comme d'après la définition du niveau normal :

$$i_1 = \frac{Q^2}{c^2 l^2 y_{01}^3}$$

on voit que :

$$\left(\frac{dH}{dy} \right)_{y=y_{01}} = 1$$

La courbe $(C_{y_{01}})$ correspondante est tracée sur la figure 23, elle est très voisine de (H) . La courbe de remous (R_2) s'en déduit immédiatement.

Si la hauteur h dans la section A est supérieure à y_{01} , (R_1) est représentée dans le plan (HOy) par un arc $(P_1 P_h)$ de la courbe (C_{01}) , situé à droite de P_1 , et R_2 est représentée dans le même plan par une courbe (C_h) passant par le point P_h et admettant en ce point une tangente déterminée; la courbe (C_h) est encore très voisine de (H) .

Lorsque la hauteur h dans la section A est inférieure à y_{01} , le point P_h est à gauche de P_1 , la pente de la tangente à (C_h) au point P_h augmente. Cette pente a en effet pour valeur :

$$\left(\frac{dH}{dy} \right)_{y=h} = \frac{i_2 - \frac{Q^2}{c^2 l^2 h^3}}{z(h)}$$

où :

$$z(h) = z_{01}(h) + i_2 - i_1$$

or :

$$z_{01}(h) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{1y=h}$$

est la pente par rapport au radier amont de la ligne de remous (R_1) , *pente négative* pour $h < y_{01}$. $z(h)$ est donc une fonction décroissante de h et elle s'annule pour une certaine valeur h_1 . On a alors :

$$\left(\frac{dH}{dy} \right)_{y=y_1} = \infty$$

La courbe (C_{h_1}) est tracée sur la figure 23; elle possède, outre P_{h_1} , un certain nombre de

points où la tangente est parallèle à OH . Comme toutes les courbes (C) , elle est d'ailleurs asymptote à (H) . Lorsque y augmente indéfiniment, la courbe de remous correspondante présente un certain nombre d'ondulations dont l'amplitude va en s'amortissant lorsque la profondeur d'eau augmente, la ligne d'eau possédant, comme nous l'avons montré, une asymptote horizontale.

L'amplitude de la première ondulation va en augmentant lorsque la hauteur d'eau dans la section A devient inférieure à h_1 . La pente de la tangente à (C_h) en P_h devient alors négative; le point le plus bas de la ligne d'eau à l'aval de A se rapproche du niveau normal. En particulier, pour une certaine valeur h_m de h , la courbe (C_{h_m}) qui passe par P_{h_m} passe par le point P_2 de coordonnées :

$y = y_{02}$, $H = H_{02} = y_{02} + \frac{Q^2}{2gl^2 y_{02}^2}$, ce point étant atteint lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives.

Nous avons vu en effet qu'il existe une simple infinité de courbes (C) qui satisfont à cette condition. Ces courbes sont donc les courbes intégrales d'une équation du premier ordre :

$$f\left(y, H, \frac{dH}{dy}\right) = 0$$

Comme au point P_h , H et dH/dy sont des fonctions bien déterminées de h , l'équation précédente est une équation en h qui permet de déterminer h_m .

La position du point P_{h_m} sur la figure 23 a été déterminée par continuité, en utilisant la propriété démontrée plus haut concernant l'aire comprise entre une courbe (C) et la courbe (H) .

La ligne de remous (R_2) correspondante est asymptote à la droite $y = y_{02}$ du régime uniforme.

Il est facile de se rendre compte que la hauteur d'eau dans la section A ne peut être inférieure à h_m , car la courbe (C_h) correspondante (voir figure 23) serait située entièrement à gauche de P_h , la hauteur d'eau à l'aval de A décroîtrait sans cesse et la courbe de remous correspondante ne pourrait satisfaire aux conditions aval.

Le tracé des diverses courbes de remous cor-

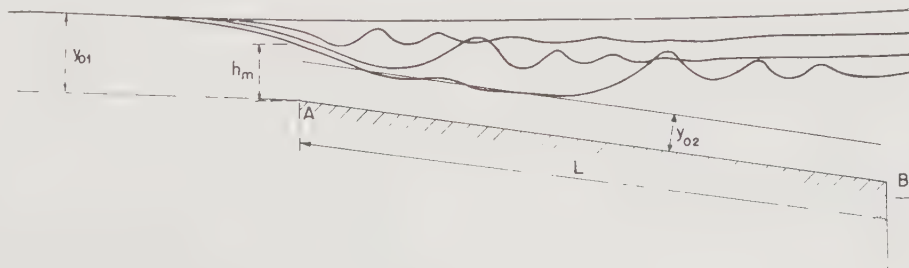


FIG. 24

respondant aux diverses hauteurs d'eau dans la section A est figuré sur la figure 24. Ces lignes d'eau sont obtenues lorsqu'on fait varier les conditions aval, par exemple la hauteur d'eau dans un réservoir B situé à une distance L à l'aval de A.

Lorsque le niveau de l'eau dans B diminue, la hauteur d'eau dans la section A décroît. Au-dessous d'une certaine cote h_B du plan d'eau dans le réservoir B, il est impossible d'obtenir une ligne de remous (R_2) satisfaisant aux conditions limites en A et B, la hauteur d'eau dans la section A devient indépendante des conditions aval, tout se passant comme si le canal de pente i_2 s'éloignait indéfiniment à l'aval. La ligne de remous est asymptote au régime uniforme $y = y_{02}$.

3. — Canal communiquant à l'amont avec un réservoir A, l'admission de l'eau étant réglée par une vanne.

Désignons par H la cote du plan d'eau dans le réservoir A, au-dessus du radier du canal; a , l'ouverture de la vanne.

Nous supposons que le canal de pente i s'éloigne à l'infini à l'aval.

Le problème se pose de la façon suivante :

Pour des valeurs données de a et de H , quel est le débit Q dans le canal et la forme de la ligne d'eau?

Les conditions aux limites à l'extrémité amont seront obtenues en appliquant le théorème de BERNOULLI et le théorème des quantités de mouvement entre la section (1) située au droit de la vanne et la section (2) située dans la portion de canal à l'amont de la vanne, suffisamment loin de celle-ci pour que la répartition des vitesses puisse y être considérée comme uniforme.

Nous négligerons également la pente et la courbure de la ligne d'eau dans la section (2)

la hauteur d'eau en A étant précisément h_m . Dans le plan HOy (fig. 23), la courbe figurative est (C_{hm}).

A l'amont de B, tout se passe également comme si le canal de pente i_2 s'éloignait indéfiniment à l'amont. La ligne de remous se détermine alors d'après les considérations du paragraphe (1), la courbe figurative dans le plan HOy étant (C_{02}).

On retrouve ainsi la notion classique de « section de contrôle ».

Le problème se résoudre de la même façon si le canal comportait un plus grand nombre de portions de pente différentes. Nous allons maintenant préciser les conditions aux limites à l'extrémité amont.

ainsi que les pertes de charges par frottement entre (1) et (2).

Dans ces conditions, l'application des théorèmes précités nous permet de connaître pour un débit Q la valeur des fonctions $H(a)$ et $M(a)$ dans la section origine (1) du canal. On a, en effet :

$$H = h + \frac{Q^2}{2 g l^2 h^2} = H(a)$$

$$\frac{h^2}{2} + \frac{Q^2}{g l^2 h} = M(a) + \frac{P}{\rho g}$$

h désignant la hauteur d'eau à l'amont de la vanne et P la poussée de l'eau sur la face amont de celle-ci. Cette poussée est une fonction de l'ouverture a et de la hauteur d'eau amont h que nous préciserons plus loin.

Nous nous bornerons pour le moment à montrer que les conditions aux limites permettent la détermination du débit.

En éliminant $d^2 y / dx^2$ entre les deux équations qui déterminent les fonctions M et H , on obtient une équation donnant la pente de la ligne d'eau au droit de la vanne :

$$\frac{Q^2}{6 g l^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=a}^2 = H(a) a^2 - \frac{a^3}{2} + \frac{Q^2}{2 g l^2} - M(a) a$$

dont il faut prendre la solution correspondant à une pente négative.

Pour une valeur donnée du débit Q , la ligne d'eau est ainsi parfaitement déterminée par les conditions de CAUCHY au droit de la vanne.

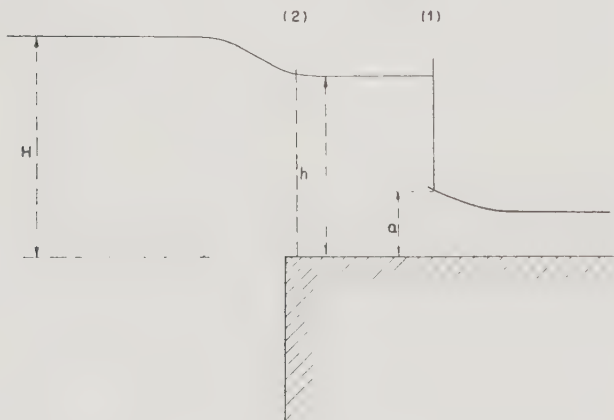


FIG. 25

Pour $x = 0$ $y = a$ $H = H(a)$:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=a}$$

Le débit est alors déterminé par les conditions d'écoulement aval.

Avant d'examiner l'influence de ces conditions, nous commencerons par étudier l'écoulement sous une vanne en négligeant le frottement, hypothèse sensiblement conforme à la réalité lorsque le radier, supposé horizontal, s'étend à l'aval sur une assez faible longueur.

THÉORIE DES ÉCOULEMENTS PAR VANNE DE FONDS.

Le frottement étant négligé, la ligne d'eau à l'aval de la vanne est une solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{Q^2}{gl^2} \left[\frac{1}{3} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{6} \frac{1}{y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2}$$

H désignant la charge à l'amont de la vanne. C'est une constante caractérisant l'écoulement (*).

On en déduit immédiatement une intégrale première sous la forme :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = Hy^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} + Cy \quad (18)$$

C étant une constante arbitraire qui est déterminée par la connaissance de la valeur de M . En effet, en se reportant au système (8) qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{Q^2}{3gl^2} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = M - \frac{y^2}{2} - \frac{Q^2}{gl^2 y} \\ \frac{dM}{dx} = 0 \end{cases}$$

on voit que la fonction $M(x)$ est également une constante caractéristique de l'écoulement et que la ligne d'eau est également une courbe intégrale de l'équation :

$$\frac{Q^2}{3gl^2} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = M - \frac{y^2}{2} - \frac{Q^2}{gl^2 y}$$

(*) En effet lorsqu'on néglige le frottement et si le radier est horizontal $i = 0$, la seconde équation du système (9) s'écrit $dH/dx = 0$, c'est-à-dire $H = c^{ste}$.

qui s'intègre aisément en posant $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = z(y)$, ce qui conduit à l'équation linéaire du premier ordre :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \left[\frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} \right] = M - \frac{y^2}{2} - \frac{Q^2}{gl^2 y}$$

dont l'intégration est immédiate par l'utilisation du facteur intégrant $1/y^2$:

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{z}{y^2} \right] = \frac{M}{y^2} - \frac{1}{2} - \frac{Q^2}{gl^2 y^3}$$

on obtient ainsi l'intégrale première :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = -My - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} + C_1 y^2 \quad (19)$$

Les équations (18) et (19) sont équivalentes, la forme (19) montrant que la constante d'intégration C qui intervient dans (18) $C = -M$. Dans ces conditions, (18) et (19) s'écrivent :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = Hy^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} - My \quad (18)$$

Précisons maintenant les valeurs de H et M qui sont données, nous l'avons vu, par le théorème de BERNOULLI et des quantités de mouvement.

Si h est la hauteur d'eau à l'amont de la vanne (fig. 25), on a :

$$H = h + \frac{Q^2}{2gl^2 h^2}$$

$$M = \frac{h^2}{2} + \frac{Q^2}{gl^2 h} - \frac{P}{l \rho g}$$

La poussée de l'eau P sur la face amont de la vanne est fonction de l'inclinaison et de la forme du taillant, de la hauteur d'eau amont h

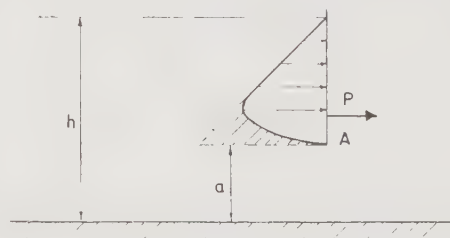


FIG. 26

et de l'ouverture a . Nous nous placerons délibérément dans l'hypothèse d'un taillant vertical à bord vif.

Nous mettrons la poussée par unité de longueur P/l sur la face amont sous la forme :

$$\frac{P}{l \rho g} = \frac{(h-a)^2}{2} F \left(\frac{Q^2}{gl^2 h^2 a} \right)$$

Lorsque $a = 0$ (vanne fermée), la répartition des pressions est hydrostatique. On en déduit :

$$F(o) = 1.$$

Pour une valeur faible de l'ouverture relative a/h , nous nous limiterons au premier terme du développement de :

$$F\left(\frac{Q^2}{gl^2 h^2 a}\right)$$

$$F\left(\frac{a}{h}\right) = 1 - \mu \frac{Q^2}{gl^2 h^2 a} + \dots$$

μ étant un coefficient sans dimension dont nous déterminerons plus loin la valeur dans l'hypothèse d'un taillant vertical à bord vif. En tout état de cause, μ est nécessairement positif car la pression étant égale à la pression atmosphérique au droit du bord inférieur A de la vanne, on doit avoir :

$$\frac{P}{l \varrho g} < \frac{(h-a)^2}{2}$$

Les valeurs de H et M étant déterminées, la connaissance du débit Q permet d'obtenir la ligne d'eau. C'est la courbe intégrale de l'équation différentielle (18) qui satisfait à la condition de CAUCHY.

$$x = 0 \quad y = a$$

En fait, ce sont les conditions d'écoulement aval qui déterminent le débit, ainsi que nous le verrons plus loin en étudiant, compte tenu du frottement, le cas d'un canal de pente i . Par analogie avec cette étude, nous ferons, pour calculer le débit, l'hypothèse suivante : « La ligne d'eau est la courbe intégrale particulière de l'équation (18) qui admet une asymptote horizontale. »

Dans ces conditions, si $y = y_0$ (*) est l'ordonnée de cette asymptote, l'équation en y :

$$Hy^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} - My = 0$$

admet une racine double pour $y = y_0$, ce qui conduit aux deux relations :

$$\begin{cases} Hy_0^2 - \frac{y_0^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} - My_0 = 0 \\ 2Hy_0 - \frac{3y_0^2}{2} - M = 0 \end{cases}$$

(*) Ne pas confondre y_0 avec la hauteur normale qui n'est d'ailleurs pas définie puisque $i = 0$ et que l'on ne tient pas compte des frottements.

d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} H = y_0 + \frac{Q^2}{2gl^2 y_0^2} \\ M = \frac{y_0^2}{2} + \frac{Q^2}{gl^2 y_0} \end{cases}$$

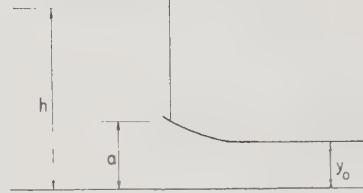


FIG. 27

ou, en tenant compte des valeurs de H et M :

$$y_0 + \frac{Q^2}{2gl^2 y_0^2} = h + \frac{Q^2}{2gl^2 h}$$

$$\frac{y_0^2}{2} + \frac{Q^2}{gl^2 y_0} = ah - \frac{a^2}{2} + \frac{Q^2}{gl^2 h} + \mu \frac{Q^2 (h-a)^2}{gl^2 h^2 a}$$

équations qui, pour une hauteur d'eau amont h et une ouverture a données, déterminent le débit Q et la hauteur d'eau y_0 à l'aval.

Nous adopterons pour la résolution de ce système des variables sans dimensions en utilisant les coefficients classiques :

Ouverture relative : $\lambda = a/h$

Coefficient de contraction : $\sigma = y_0/a$.

La première équation s'écrit alors :

$$Q^2 = \frac{2gl^2 y_0^2 h^2}{h + y_0} = 2gl^2 a^2 h \times \frac{\sigma^2}{1 + \lambda \sigma}$$

$$Q = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \lambda \sigma}} la \sqrt{2gh} = C_q la \sqrt{2gh}$$

$C_q = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \lambda \sigma}}$ désignant le coefficient de débit.

En reportant la valeur de Q^2 dans la deuxième équation, on est conduit à une équation en σ :

$$(1 + \lambda \sigma) [\lambda \sigma^2 - 2 + \lambda] - 2\mu (1 - \lambda)^2 \sigma^2 = 4\sigma (\sigma \lambda - 1) \quad (20)$$

qui donne le coefficient de contraction σ en fonction de l'ouverture relative $\lambda = (a/h)$.

CAS D'UNE « OUVERTURE RELATIVE » NULLE ($\lambda = 0$).

Ce cas est réalisé lorsque la hauteur d'eau amont h est grande par rapport à l'ouverture a de la vanne.

Le coefficient de débit C_{qm} est alors égal au coefficient de contraction σ_m et σ_m est solution de l'équation du second degré $-1 + 2\sigma = \mu \sigma^2$.

Ce cas particulier est intéressant car il va nous permettre de déterminer la valeur de μ pour un taillant vertical à bord vif. En effet, lorsque a/h est très petit, tout se passe comme si le fluide à l'amont de la vanne et loin de l'ouverture était à une pression uniforme. On est conduit au problème classique d'hydrodynamique de l'écoulement par une fente pour un fluide non pesant en mouvement irrotationnel.

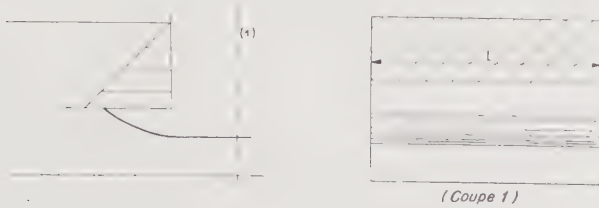


FIG. 28

Sa résolution à l'aide des fonctions analytiques conduit à des valeurs égales pour le coefficient de débit et le coefficient de contraction.

$$C_{qm} = \sigma_m = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,611$$

On en déduit la valeur du coefficient μ :

$$\mu = \frac{-1 \pm 2\sigma_m}{\sigma_m^2} \quad \text{d'où } \mu = 0,595$$

Remarquons en passant que dans le cas d'un orifice rentrant (orifice de BORDA), la répartition des pressions sur la face amont de la vanne est rigoureusement hydrostatique; on a alors : $\mu = 0$ $C_q = \sigma = 1/2$ dans l'hypothèse d'une ouverture relative très petite. Pour une ouverture relative λ différente de 0, le coefficient de contraction serait donnée par l'équation (20) où l'on fait $\mu = 0$.

Revenant au cas d'un taillant vertical à bord vif, le coefficient de contraction σ est donné en fonction de l'ouverture relative par l'équation :

$$(1 + \lambda \sigma) [\lambda \sigma^2 - 2 + \lambda] = 1,190 (1 - \lambda)^2 \sigma^2 \\ = 4 \sigma (\sigma \lambda - 1)$$

dont il convient de prendre la solution inférieure à 1.

Le tableau ci-après donne les valeurs de σ et C_q en fonction du rapport $\lambda = (a/h)$.

L'examen de ce tableau montre que le coefficient de débit C_q reste sensiblement constant lorsque λ varie de 0 à 0,5.

$\lambda = \frac{a}{h}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
σ	0,611	0,629	0,649	0,670	0,693	0,718	1
C_q	0,611	0,610	0,6105	0,611	0,613	0,616	0,707

ce qui est conforme à l'expérience. Pour des valeurs supérieures du rapport a/h , on peut se demander s'il est justifiable de se limiter dans l'expression de la poussée :

$P = \rho g l \frac{(h-a)^2}{2} F\left(\frac{Q^2}{g l^2 h^2 a}\right)$ au premier terme du développement de $F\left(\frac{Q^2}{g l^2 h^2 a}\right)$:

$$F\left(\frac{Q^2}{g l^2 h^2 a}\right) = 1 - 0,595 \frac{Q^2}{g l^2 h^2 a} + \dots$$

En fait, lorsque a/h est suffisamment grand, l'influence de la poussée devient négligeable.

On voit aussitôt que lorsque λ tend vers 1, la racine de l'équation en σ inférieure à 1 tend vers l'unité, quel que soit $F\left(\frac{Q^2}{g l^2 h^2 a}\right)$, on a alors : $\sigma = 1$ $\lambda = 1$.

$$C_q = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \lambda \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

$$Q^2 = C_q^2 l^2 a^2 2 g h \quad Q^2 = l^2 a^2 g h \quad y_0 = a = h$$

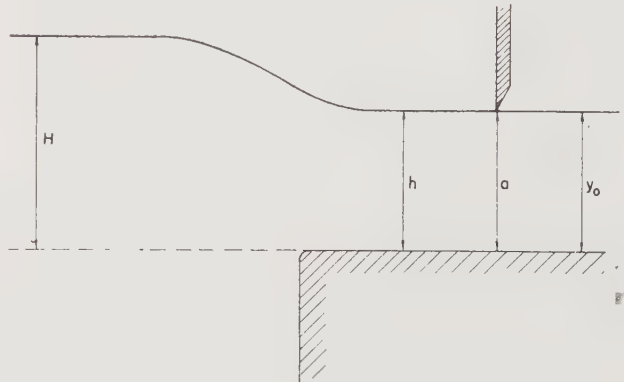


FIG. 29

d'où :

$$\frac{Q^2}{g l^2 h^3} = 1$$

$$H = h + \frac{Q^2}{2 g l^2 h^2} = h + \frac{h}{2} = \frac{3}{2} h$$

La hauteur d'eau h est égale à la hauteur critique. On retrouve la formule de BELANGER donnant le débit d'un déversoir à large seuil :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} l H \sqrt{2 g H}$$

EQUATION DE LA LIGNE D'EAU.

L'équation différentielle de la ligne d'eau (18) se met sous la forme :

$$\frac{Q^2}{3gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - y_0)^2 \left[\frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} - y \right] \quad (17)$$

en faisant intervenir l'ordonnée y_0 de l'asymptote horizontale.

Cette équation à variables séparées s'intègre à l'aide des fonctions élémentaires.

L'intégrale générale s'écrit :

$$y = y_0 + 4 \left(\frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} - y_0 \right) \frac{Ae^{\alpha x/y_0}}{\left(1 + Ae^{\alpha x/y_0} \right)^2}$$

α étant un coefficient sans dimension dont la valeur est :

$$\alpha = \frac{\sqrt{3(Q^2 - gl^2 y_0^3)}}{Q}$$

La constante d'intégration s'obtient en écrivant que pour $x = 0$ $y = a$.

$$a = y_0 + 4 \left(\frac{Q^2}{gl^2 y_0^2} - y_0 \right) \frac{A}{(1 + A)^2}$$

En faisant intervenir les variables sans dimensions :

$$\lambda = \frac{a}{h} \quad \sigma = \frac{y_0}{a}$$

A est la solution de l'équation du second degré :

$$(1 - \sigma) A^2 + 2 \left(1 + \sigma - \frac{4}{\lambda(1 + \lambda\sigma)} \right) A + 1 - \sigma = 0$$

dont il faut prendre la racine supérieure à l'unité, qui correspond à une pente négative de la ligne d'eau au point A $x = 0$ $y = a$.

PROFIL OPTIMUM
DE LA SURFACE D'APPUI D'UNE VANNE.

Les vannes courantes ne peuvent être constituées par un taillant à bord vif, leur surface d'appui doit avoir une certaine épaisseur de façon à assurer la transmission des efforts. Dans ces conditions si, pour une certaine ouverture relative a/h , la ligne d'eau est située au-dessous du profil de la surface d'appui, il se produit entre cette surface et le niveau du courant un espace en forme de coin où l'air est entraîné par le frottement hors de cet espace. La dépression ainsi créée est la cause de phénomènes pulsatoires avec décollements et recollements successifs de la lame d'eau avec la surface d'appui. Les effets

dynamiques correspondants engendrent dans certains cas des vibrations particulièrement dangereuses du corps de la vanne.

Désignons par a_1 l'ouverture maximum de la vanne correspondant à la hauteur d'eau amont

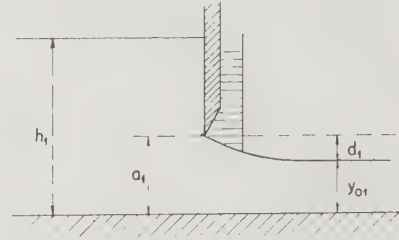


FIG. 30

maximum h_1 . Soit, dans ces conditions, (E_1) la courbe d'écoulement théorique correspondant à un taillant vertical à bord vif. On ne change rien à l'écoulement en remplaçant le taillant par un profil épousant une partie de la courbe (E_1) .

Si, pour une ouverture quelconque a inférieure à a_1 , la courbe théorique d'écoulement (E) est située au-dessous de (E_1) , la lame d'eau correspondant à cette position exercera sur la surface d'appui une poussée verticale dirigée de bas en haut, et aucun phénomène pulsatoire ne sera à craindre au cours de la levée de la vanne.

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi se déduit de l'examen de la figure 31.

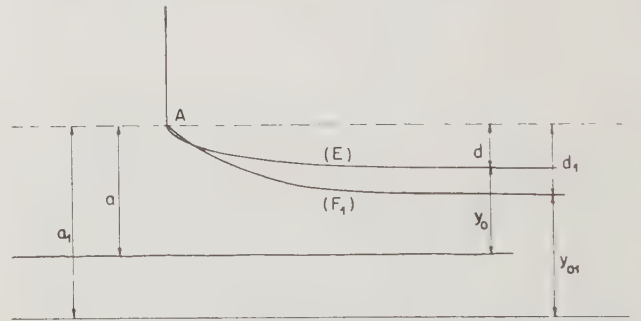


FIG. 31

Elle s'écrit :

$$d = a - y_0 < d_1 = a_1 - y_{01}$$

La manœuvre de levée de la vanne ayant lieu sous la charge constante :

$$H = h + \frac{Q^2}{2gl^2 h^2} = h_1 + \frac{Q_1^2}{2gl^2 h_1^2}$$

nous sommes conduit à poser :

$$d = a - y_0 = h \lambda (1 - \sigma)$$

$$H - h + \frac{Q^2}{2gl^2 h^2} = h \left(1 + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{1 + \lambda \sigma} \right)$$

d'où :

$$d = \frac{\lambda (1 - \sigma)}{1 + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{1 + \lambda \sigma}} H$$

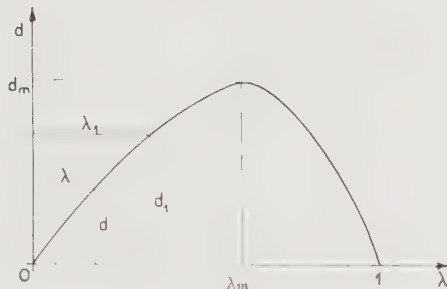


FIG. 32

L'examen de la courbe représentant la variation de d lorsque l'ouverture relative λ varie de 0 à 1 (σ étant relié à λ par la relation (20)), montre que d passe par un maximum d_m correspondant à une ouverture relative λ_m .

La condition $d < d_1$ exige donc que :

$$\lambda_1 = a_1/h_1 < \lambda_m$$

Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante. En effet, la pente de la tangente en A à la courbe (E) est donnée, en fonction des variables sans dimensions, par l'expression :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=a} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma} (1 - \sigma) \sqrt{1 - \frac{\lambda (1 + \lambda \sigma)}{2}}$$

Lorsque l'ouverture relative λ croît de 0 à 1, cette pente décroît de 1,10 à 0. La courbe (E) se trouve donc au voisinage du point A au-dessous de la courbe (E₁), même si la condition précédente est réalisée (confers fig. 31).

Il convient donc de s'assurer que, pour une ouverture a inférieure à l'ouverture maximum a_1 , la courbe (E) recoupe (E₁) à l'amont de l'extrémité du profil de la vanne.

EQUATION DE LA LIGNE D'EAU POUR UNE OUVERTURE RELATIVE NULLE.

C'est le cas où la hauteur d'eau amont h est très grande vis-à-vis de l'ouverture de la vanne.

L'équation différentielle (17) de la ligne d'eau s'écrit, en variables sans dimensions :

$$u = (y/a) \quad t = (x/a) :$$

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{3}{\sigma^2} (u - \sigma)^2 \left[1 - \frac{\lambda}{2} (1 + \lambda \sigma) u \right]$$

Pour $\lambda = 0$, la détermination négative s'écrit :

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\sqrt{3}}{\sigma} (u - \sigma)$$

dont l'intégrale générale s'écrit :

$$u = \sigma + A e^{-(\sqrt{3}/\sigma) t}$$

A étant déterminé par la condition :

$$t = 0 \quad u = 1,$$

on en déduit l'équation de la ligne d'eau sous la forme :

$$\frac{y}{a} = \sigma + (1 - \sigma) e^{-(\sqrt{3}/\sigma) (x/a)}$$

ou, en tenant compte de la valeur du coefficient de contraction pour :

$$y = 0 \quad \sigma = 0,611$$

$$\frac{y}{a} = 0,611 + 0,389 e^{-2,835 x/a}$$

La courbe correspondante est tracée sur la figure 33.

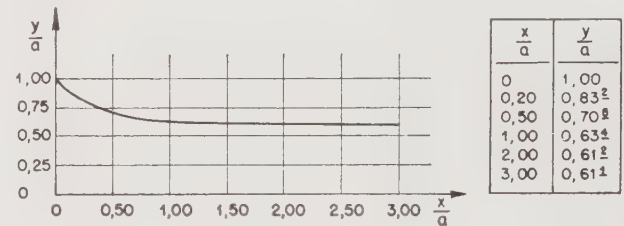


FIG. 33

VANNE SUIVIE D'UN CANAL RECTANGULAIRE DE PENTE UNIFORME.

Nous supposons la vanne constituée par un taillant vertical à bord vif et nous tiendrons compte du frottement.

Nous avons vu que, dans ces conditions, le débit est déterminé par les conditions d'écoulement à l'aval de la vanne. Il dépend donc non seulement de l'ouverture relative a/h , mais aussi de l'inclinaison du radier,

La ligne de remous à l'aval de la vanne sera déterminée par la courbe (C) qui la représente dans le plan HOy.

Les fonctions $H(a)$ et $M(a)$ à l'aplomb de la vanne ($x = 0$) sont données, en fonction du débit Q , par les relations :

$$H(a) = h + \frac{Q^2}{2 g l^2 h^2} = \mathcal{H}$$

$$M(a) = ah - \frac{a^2}{2} + \frac{Q^2}{g l^2 h} + \mu \frac{Q^2}{2 g l^2 h^2 a} (h - a)^2$$

d'où l'on déduit la pente de la ligne d'eau en A :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=a}^2 = H(a) a^2 - \frac{a^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} - M(a) a$$

soit :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=a}^2 = 3(1-\mu) \left(1 - \frac{a}{h} \right)^2$$

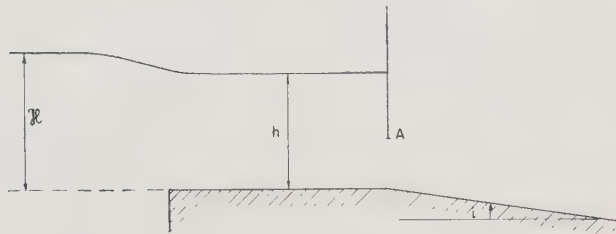


FIG. 34

La courbe (C), qui représente la ligne de remous dans le plan HOy, est donc la courbe intégrale du système (10) $H = H(y)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{z^2}{y} \right] = H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 y^2} \\ z \frac{dH}{dy} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{array} \right.$$

qui satisfait pour $y=a$ aux conditions de CAUCHY :

$$H(a) = \mathcal{H}$$

$$z(a) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=a}$$

Pour un débit donné Q, cette courbe (C) est donc parfaitement déterminée. Il reste à déterminer le débit Q par les conditions d'écoulement aval, c'est-à-dire en écrivant que la ligne de remous est asymptote à la droite du régime uniforme lorsque x tend vers ∞ . Or, on sait qu'aux lignes de remous satisfaisant à cette condition correspond dans le plan (HOy) une simple infinité de courbes (C). Il existe donc entre les données initiales, a , $H(a)$, $z(a)$, une relation qui détermine le débit.

Le tracé de la courbe de remous se déduit de l'allure de la courbe (C) dans le plan HOy. Les courbes de la figure 35 donnent le tracé des diverses lignes d'eau et des lignes (C) correspondantes, pour une charge amont H donnée lorsqu'on fait varier la pente du canal de décharge.

Nos équations ne sont applicables sous la forme (10) que si la pente est suffisamment faible pour qu'on puisse poser $\sin i = i$, $\cos i = 1$.

Dans ces conditions, la pente de la tangente en A à la courbe (C) :

$$\left(\frac{dH}{dy} \right)_{y=a} = \left[i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 a^3} \right] \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=a}}$$

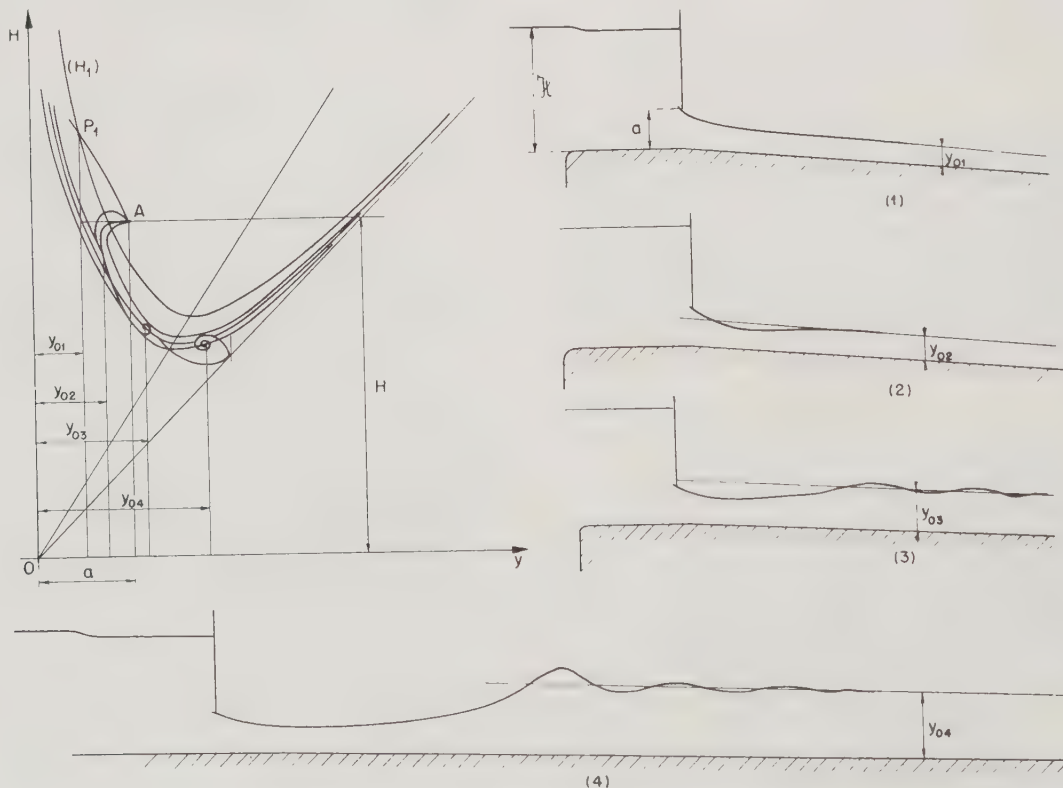


FIG. 35

Comme la pente de la tangente en A à la courbe de remous $(dy/dx)_{y=a}$ ne dépend que du rapport a/h et est voisin de 1 en valeur absolue, si a/h est assez grand $(dH/dy)_{y=a}$ a une valeur faible; $(dy/dx)_{y=a}$ étant négatif $(dH/dy)_{y=a}$ a un signe variable avec la quantité $i - (Q^2/c^2 l^2 a^3)$, c'est-à-dire avec la position du point A par rapport à la droite (D) du régime uniforme $y = y_0$, cette pente est négative si $y_0 < a$ et positive si $y_0 > a$.

Pour une valeur suffisamment faible de la pente du canal de décharge, le régime devient fluvial dans le canal, on voit apparaître un ressaut ondulé. Lorsque la pente diminue encore, le front de l'onde se raidit et la première vague déferle, le ressaut remonte progressivement dans le canal et vient recouvrir le bord inférieur de la vanne.

Pour une valeur faible de la pente du canal de décharge et lorsque le seuil n'est pas noyé, il est intéressant de comparer la valeur du débit et la forme de la courbe de remous au voisinage de la vanne au débit théorique Q_T et à la ligne de remous théorique (R_T) précédemment obtenus en supposant le radier horizontal et en négligeant le frottement.

Cette courbe (R_T) est la courbe intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{Q^2}{6 gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = \mathcal{H} - y - \frac{Q^2}{2 gl^2 y^2}$$

qui satisfait pour $x = 0$ aux conditions de CAUCHY $y = a$:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=a} = - \sqrt{3(1-\mu)} \left(1 - \frac{a}{h} \right)$$

le débit théorique Q_T étant précisément la valeur qu'il faut donner à Q pour que cette courbe admette une asymptote horizontale.

Dans le plan HOy , cette courbe (R_T) est représentée par le segment AB de la droite $H = \mathcal{H}$, compris entre les droites d'équations $y = a$, $y = \sigma a$ (σ coefficient de contraction).

Lorsqu'on tient compte du frottement, la courbe de remous (R) est la solution du système :

$$\begin{cases} \frac{Q^2}{6 gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2 gl^2 y^2} \\ \frac{dH}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{cases}$$

qui satisfait, pour $x = 0$, aux conditions de CAUCHY :

$$y = a, \quad H = \mathcal{H}, \quad \frac{dy}{dx} = - \sqrt{3(1-\mu)} \left(1 - \frac{a}{h} \right)$$

Le débit réel Q_R étant la valeur qu'il faut donner à Q pour que cette courbe intégrale soit

asymptote à la droite $y = y_0$ du régime uniforme, y_0 étant défini par l'équation :

$$i - \frac{Q_R^2}{c^2 l^2 y^3} = 0$$

Supposons que l'on donne précisément à la pente du canal de décharge la valeur :

$$i_R = \frac{Q_R^2}{c^2 l^2 \sigma^3 a^3}$$

pour laquelle la hauteur du régime uniforme y_0 coïncide avec σa .

Dans ces conditions, la courbe (C_R) , qui représente dans le plan HOy la ligne de remous (R), est voisine du segment AB (fig. 36). Q_R est donc

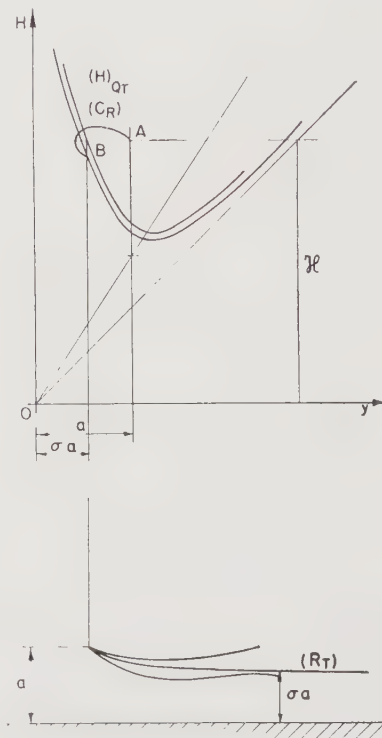


FIG. 36

pratiquement égal à Q_T , en fait il lui est légèrement inférieur.

Quant au coefficient de contraction, il est dans ce cas légèrement inférieur au coefficient théorique σ , la hauteur d'eau remontant ensuite pour atteindre le niveau normal.

Lorsque la pente du canal de décharge est inférieure à i_R , le débit est inférieur à Q_T et le coefficient de contraction supérieur au coefficient de contraction théorique.

Lorsque $i > i_R$, Q est supérieur à Q_T .

En conclusion, pour de faibles pentes du ca-

nal de décharge, le débit varie entre des limites assez voisines tant que le seuil n'est pas noyé, la valeur moyenne du débit étant bien représentée par le débit théorique Q_T .

4. — Déversoir à large seuil.

Comme dernière application de nos équations, nous étudierons un type d'écoulement rapidement varié qui a donné lieu à de nombreuses recherches théoriques et expérimentales : l'écoulement sur un déversoir à large seuil.

Nous supposons le radier horizontal et le

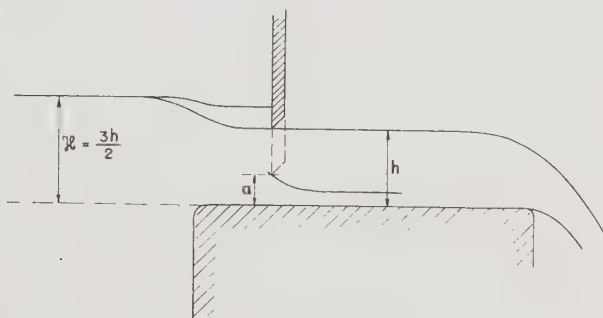


FIG. 37

réservoir amont suffisamment profond pour qu'on puisse négliger la vitesse d'approche. Nous désignerons par $\mathcal{H}$ la hauteur d'eau amont au-dessus du déversoir.

Nous commencerons par étudier le phénomène en négligeant le frottement.

CAS D'UN SEUIL TRÈS LISSE.

Dans ces conditions, nous avons vu au paragraphe précédent que si on règle le débit sur le seuil à l'aide d'une vanne d'ouverture a , pour une ouverture de la vanne égale aux $2/3$ de la hauteur d'eau à l'amont du seuil $a = h = \frac{2}{3} \mathcal{H}$, la ligne d'eau effleurant le bord inférieur de la vanne était constituée par une droite horizontale.

Le débit a alors la valeur :

$$Q_m = \frac{2}{3\sqrt{3}} l \mathcal{H} \sqrt{2g\mathcal{H}} = 0,385 l \mathcal{H} \sqrt{2g\mathcal{H}}$$

Ce résultat peut être établi d'une manière différente en recherchant les conditions que doivent remplir les données pour que la ligne d'eau soit précisément une droite.

Cette ligne d'eau est une courbe intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \mathcal{H} y^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} - My \quad (18)$$

Ecrivons que pour $y = h$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

On obtient :

$$\mathcal{H} = h + \frac{Q^2}{2gl^2 h^2}$$

$$M = \frac{h^2}{2} + \frac{Q^2}{gl^2 h}$$

L'équation précédente se met sous la forme :

$$\frac{Q^2}{3gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - h)^2 \left(\frac{Q^2}{gl^2 h^2} - y \right) \quad (17)$$

dont l'allure des courbes intégrales est figurée sur la figure 38.

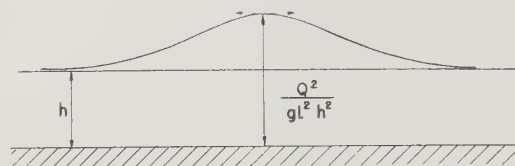


FIG. 38

La condition $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ pour $y = h$ n'est donc pas suffisante pour que la ligne d'eau soit une droite, il faut en outre que $h = \frac{Q^2}{gl^2 h^2}$. On en déduit :

$$h = \frac{2}{3} \mathcal{H}, \quad Q = Q_m = \frac{2}{3\sqrt{3}} l \mathcal{H} \sqrt{2g\mathcal{H}}, \quad M = 2 \frac{\mathcal{H}^2}{3}$$

En pratique, les conditions d'écoulement aval (hauteur d'eau dans le réservoir aval) et le frottement sur le seuil diminuent la valeur du débit qui est inférieure à Q_m , sauf dans l'hypothèse d'un seuil lisse dont la longueur n'excède pas quatre à cinq fois la hauteur d'eau amont.

Même si, dans la détermination de l'allure de la ligne d'eau, on peut en première approximation négliger le frottement et supposer la charge constante et égale à $\mathcal{H}$, on est conduit à prendre comme valeur du débit sur le seuil une quantité Q inférieure à Q_m .

Dans ces conditions, la ligne d'eau est une courbe intégrale de l'équation (18).

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \mathcal{H} y^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} - My$$

Les considérations qui vont suivre ont pour but de déterminer, pour une charge amont $\mathcal{H}$ et un débit Q sur le seuil, la hauteur d'eau h à l'extrémité amont et la valeur de la constante M .

DÉTERMINATION DE LA HAUTEUR D'EAU h A L'EXTRÉMITÉ AMONT DU SEUIL.

Pour une valeur de débit $Q < Q_m$, la hauteur d'eau sur le seuil oscille entre deux valeurs extrêmes y_0 et y_1 qui sont les racines les plus grandes de l'équation du troisième degré :

$$\mathcal{H} y^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2 g l^2} - M y = 0$$

Le point le plus bas d'ordonnée $y = y_0$ est atteint nous le verrons, à une distance faible de l'extrémité amont du seuil.

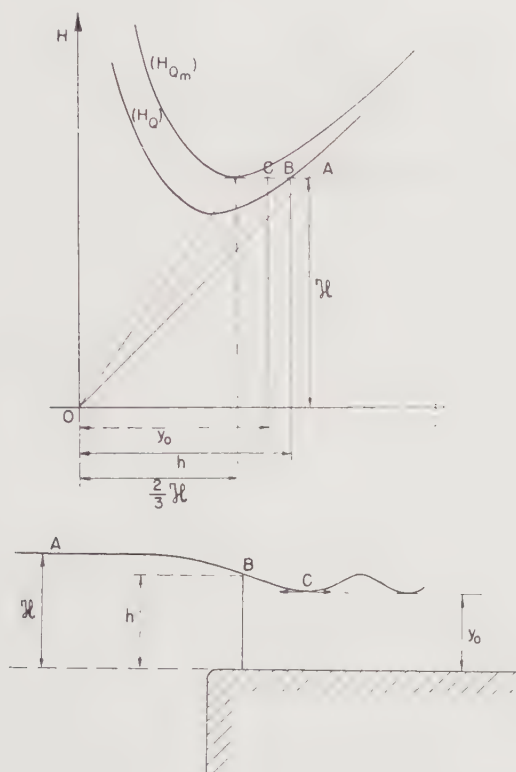


FIG. 39

Le point C de coordonnées $y = y_0$ $H = \mathcal{H}$ qui le représente dans le plan HOy , est situé au-dessus de la courbe (H_Q) définie par l'équation :

$$H = y + \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2}$$

ce qui se déduit immédiatement de la relation :

$$\frac{Q^2}{3 g l^2} \left[\frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{2 y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = \mathcal{H} - y - \frac{Q^2}{2 g l^2 y^2}$$

En effet, pour :

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} > 0,$$

donc :

$$\mathcal{H} - y_0 - \frac{Q^2}{2 g l^2 y_0^2} > 0$$

Il existe donc à l'amont de C un point B de la ligne d'eau correspondant à une hauteur d'eau h , pour lequel on a rigoureusement :

$$\mathcal{H} = h + \frac{Q^2}{2 g l^2 h^2}$$

en ce point :

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{y=h} = \frac{1}{2 h} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=h}^2$$

Le point B ne coïncide pas avec l'extrémité amont du déversoir, mais il en est très voisin. Il est donc justifié de prendre pour hauteur d'eau h à l'extrémité amont la racine de l'équation $\mathcal{H} = h + (Q^2/2 g l^2 h^2)$ qui correspond au régime fluvial, racine qui est réelle pour toute valeur de Q inférieure à Q_m .

DÉTERMINATION DE LA CONSTANTE M.

La signification mécanique de la constante M dans l'équation (18) a déjà été définie au paragraphe précédent. Elle s'introduit par application du théorème des quantités de mouvement et conduit, lorsqu'on néglige le frottement, à la relation :

$$\frac{Q^2}{3 g l^2} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = M - \frac{y^2}{2} - \frac{Q^2}{g l y}$$

dont l'intégrale première est, nous l'avons déjà démontré, équivalente à (18).

On est donc conduit, pour déterminer la valeur de M, à appliquer le théorème des quantités de mouvement au volume de fluide compris entre les sections (1), (2) et (3) représentées sur la figure 40.

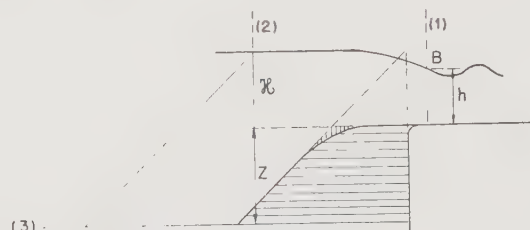


FIG. 40

(1) est la section précédemment définie où la hauteur d'eau est h et qui coïncide pratiquement avec l'extrémité amont du déversoir;

(2) est une section normale située suffisamment à l'amont pour que la vitesse de l'eau soit négligeable dans toute la section;

(3) est une section horizontale située à une

cote z au-dessous du seuil, assez bas pour que la pression puisse être considérée comme constante et la vitesse nulle en tout point de cette section.

Dans ces conditions, le théorème des quantités de mouvement en projection sur un axe horizontal s'écrit :

$$\frac{(\mathcal{H} + z)^2}{2} = \frac{1}{\rho g l} \iint_{(1)} p d\sigma + \frac{1}{l g} \iint_{(1)} u^2 d\sigma + \frac{P}{\rho g l}$$

D'après la signification de M , on a :

$$M = \frac{1}{\rho g l} \iint_{(1)} p d\sigma + \frac{1}{l g} \iint_{(1)} u^2 d\sigma$$

P désigne la poussée de l'eau sur la paroi amont du déversoir entre la section (3) et le seuil. Elle est représentée sur la figure 40 par l'aire hachurée horizontalement. On voit immédiatement, en se reportant à la figure 40, que :

$$\frac{P}{l \rho g} = \frac{(\mathcal{H} + z)^2}{2} - \frac{\mathcal{H}^2}{2} - \delta$$

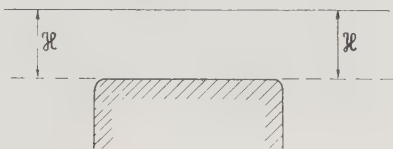
δ étant une qualité positive qui dépend de la vitesse d'appel de l'eau au voisinage du seuil et qui est représentée sur la figure 40 par l'aire hachurée verticalement.

On en déduit :

$$M = \frac{\mathcal{H}^2}{2} + \delta$$

δ est une fonction de la vitesse à l'extrémité amont du seuil dont on peut déterminer la valeur lorsque le débit est nul et lorsqu'il prend sa valeur maximum Q_m .

Le débit est nul lorsque le plan d'eau dans le réservoir aval est à la cote $\mathcal{H}$ au-dessus du seuil.



On a évidemment dans ce cas :

$$M = \frac{1}{\rho g l} \iint_{(1)} p d\sigma = \frac{\mathcal{H}^2}{2} + \delta = 0$$

lorsque $Q = Q_m$ nous avons vu que $M = (2 \mathcal{H}^2/3)$ d'où $\delta = (\mathcal{H}^2/6)$; δ varie donc de 0 à $\mathcal{H}^2/6$ lorsque la hauteur d'eau amont h sur le seuil varie de $\mathcal{H}$ à $2 \mathcal{H}/3$.

Ces considérations ne sont valables que si le rayon de courbure du raccordement du seuil du déversoir avec sa paroi verticale d'amont est suffisant pour éviter tout décollement.

Nos équations supposent en effet que le radier du déversoir est une ligne de courant, ce qui n'est pas réalisé lorsqu'il y a apparition sur le seuil d'un point de décollement avec zone de dépression à l'aval.

Dans l'hypothèse d'un écoulement à potentiel des vitesses à l'amont du seuil, on a, en désignant par V la vitesse de l'eau en un point du parement amont :

$$\delta = \frac{1}{l} \iint_{(\Sigma)} \frac{V^2}{2g} d\sigma$$

Nous posons :

$$\delta = \frac{Q^2}{2 g l^2 \mathcal{H}} f\left(\frac{h}{\mathcal{H}}\right)$$

Pour un seuil amont bien arrondi, nos équations ne nous permettent pas de déterminer $f\left(\frac{h}{\mathcal{H}}\right)$, mais elles nous donnent la valeur de cette fonction pour deux valeurs du rapport $\frac{h}{\mathcal{H}}$

Pour :

$$\frac{h}{\mathcal{H}} = \frac{2}{3} \quad \delta = \frac{\mathcal{H}^2}{6} = \frac{9}{16} \frac{Q^2}{g l^2 \mathcal{H}}$$

d'où :

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{8}$$

d'autre part, la pente de la tangente à la ligne d'eau sur le seuil est donnée d'après (18) par la relation :

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{6 g l^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=h}^2 &= \mathcal{H} h^2 - \frac{h^3}{2} + \frac{Q^2}{2 g l^2} \\ &- \left[\frac{\mathcal{H}^2}{2} + \frac{Q^2}{2 g l^2 \mathcal{H}} f\left(\frac{h}{\mathcal{H}}\right) \right] h \end{aligned}$$

h étant relié à Q par la relation :

$$\mathcal{H} = h + \frac{Q^2}{2 g l^2 h^2}$$

Lorsque le débit Q sur le déversoir tend vers 0, h tend vers $\mathcal{H}$. La pente de la tangente à la ligne d'eau au point B ($y = h$) doit tendre vers 0, ce qui impose $f(1) = 1$.

Nous prendrons pour $f(h/\mathcal{H})$ la fonction linéaire qui satisfait aux conditions précédentes. La comparaison des lignes d'eau obtenues expérimentalement avec celles que nous déduirons plus loin de nos équations, en tenant compte du frottement, montre que cette hypothèse est sensiblement conforme à la réalité.

Dans ces conditions, la valeur de la cons-

tante M pour un débit Q et une hauteur d'eau $\mathcal{H}$ amont a pour valeur :

$$M = \frac{\mathcal{H}^2}{2} + \frac{Q^2}{16 g l^2 \mathcal{H}} \left[11 - \frac{3 h}{\mathcal{H}} \right]$$

DÉTERMINATION DE LA LIGNE D'EAU, THÉORIE DES ONDULATIONS DE SURFACE.

La ligne d'eau correspondant au débit Q et à la charge amont $\mathcal{H}$ est la courbe intégrale de l'équation différentielle (18_a).

$$\frac{Q^2}{6 g l^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \mathcal{H} y^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2 g l^2} - \left[\frac{\mathcal{H}^2}{2} + \frac{Q^2}{16 g l^2 \mathcal{H}} \left(11 - \frac{3 h}{\mathcal{H}} \right) \right] y \quad (18_a)$$

qui satisfait à la condition de CAUCHY $x=0$ $y=h$, h étant la plus grande racine positive de l'équation :

$$\mathcal{H} = h + \frac{Q^2}{2 g l^2 h^2}$$

Pour discuter la forme de cette courbe, nous utiliserons les variables et coefficients sans dimensions.

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{h}{\mathcal{H}} & m &= \frac{Q}{l \mathcal{H} \sqrt{2 g \mathcal{H}}} \\ u &= \frac{y}{\mathcal{H}} & t &= \frac{x}{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Les équations précédentes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 &= \frac{3}{4 m^2} \left\{ 4 u^2 - 2 u^3 + 4 m^2 \right. \\ &\quad \left. - \left[2 + \frac{m^2}{2} (11 - 3 \sigma) \right] u \right\} \\ m^2 &= \sigma^2 (1 - \sigma) \end{aligned}$$

La forme de la courbe dépend de la position de σ par rapport aux racines du polynôme du troisième degré :

$$\begin{aligned} F(u) &= -2 u^3 + 4 u^2 \\ &\quad - \left[2 + \frac{m^2}{2} (11 - 3 \sigma) \right] u + 4 m^2 = 0 \end{aligned}$$

lorsque m varie de 0 à $0,385 = \frac{2}{3 \sqrt{3}}$, σ décroît de 1 à $2/3$, on a :

$$F(1) = -\frac{3 m^2}{2} (1 - \sigma)^2 < 0$$

$$F(\sigma) = \frac{\sigma}{2} (2 - \sigma) (1 - \sigma)^2 (3 \sigma - 2) > 0$$

$$F(0) = 4 \sigma^2 (1 - \sigma) > 0$$

l'équation $F(u) = 0$ admet donc trois racines réelles positives pour $2/3 < \sigma < 1$ dont deux sont inférieures à σ et la plus grande comprise entre σ et 1. Nous désignerons respectivement par $u_0 = y_0/\mathcal{H}$ $u_1 = (y_1/\mathcal{H})$ les deux racines qui encadrent $\sigma = (h/\mathcal{H})$ $u_0 < \sigma < u_1$.

Nous choisirons évidemment parmi les deux courbes intégrales de (18_a), qui passent par le point $t=0$ $u=\sigma$, celle qui admet en ce point une pente négative. Cette pente ayant pour valeur :

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{u=\sigma} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(1-\sigma)(3\sigma-2)(2-\sigma)}{2\sigma}}$$

Cette détermination étant choisie, le polynôme $F(u)$ devant rester positif, u doit être compris entre les deux racines les plus élevées de $F(u)$: u_0 et u_1 , la hauteur d'eau sur le seuil oscille donc entre deux valeurs y_0 et y_1 , pour une valeur du débit Q comprise entre 0 et Q_m .

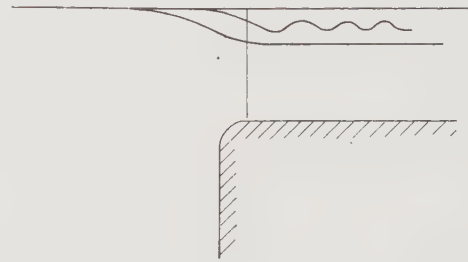


FIG. 41

Ces deux valeurs sont égales pour $Q=0$ et $Q=Q_m$.

En effet, pour $Q=0$, $F(u)$ admet une racine double $u=\sigma=1$.

$$y_0 = y_1 = h = \mathcal{H}$$

Pour $Q=Q_m = \frac{2}{3 \sqrt{3}} l \mathcal{H} \sqrt{2 g \mathcal{H}}$, $F(u)$ admet une racine triple :

$$u = \sigma = \frac{2}{3}, \quad y_0 = y_1 = h = \frac{2}{3} \mathcal{H};$$

dans les deux cas, la ligne d'eau sur le réservoir est une droite horizontale.

Nos équations mettent ainsi en évidence une forme classique de ligne d'eau connue sous le nom de « nappe ondulée » et permettent de calculer l'amplitude des ondulations. La détermination de leur longueur d'onde se ramène, à l'aide de l'équation (18), au calcul d'une intégrale elliptique. Nous mettrons à cet effet l'équation (18) sous une forme particulière faisant intervenir les hauteurs y_0 et y_1 .

Considérons l'équation (18) :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \mathcal{H} y^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} - My$$

en écrivant que $dy/dx = 0$, pour $y = y_0$ et $y = y_1$, on obtient les relations :

$$\mathcal{H} = \frac{y_1 + y_0}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2 y_1 y_0}$$

$$M = \frac{y_1 y_0}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2 y_1 y_0} (y_1 + y_0)$$

Reportant ces valeurs de $\mathcal{H}$ et M dans l'équation précédente, celle-ci se met sous la forme :

$$\frac{Q^2}{3gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - y_0)(y - y_1) \left(\frac{Q^2}{gl^2 y_1 y_0} - y \right)$$

la demi-longueur d'onde L est donnée par l'intégrale :

$$L = \frac{Q}{l \sqrt{3g}} \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(y - y_0)(y - y_1) \left(\frac{Q^2}{gl^2 y_1 y_0} - y \right)}}$$

qui se transforme en une intégrale elliptique d'un type classique à l'aide du changement de variable :

$$y = \frac{y_1 + y_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{2} u$$

il vient :

$$L = \frac{Q}{l \sqrt{3g} \left(\frac{y_1 + y_0}{2} - \frac{Q^2}{gl^2 y_1 y_0} \right)} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 + Ku)}}$$

avec :

$$K = \frac{y_1 - y_0}{y_1 + y_0 - \frac{2Q^2}{gl^2 y_1 y_0}}$$

intégrale elliptique uniformément convergente pour $-1 < K < 1$.

y_1 , y_0 et $Q^2/(gl^2 y_1 y_0)$ sont les trois racines de l'équation du troisième degré $F(y/\mathcal{H}) = 0$ classées par ordre décroissant :

$$\frac{Q^2}{gl^2 y_0 y_1} < y_0 < y_1$$

On a donc : $0 < K < 1$.

Dans ces conditions, la demi-longueur d'onde peut être calculée par un développement en série uniformément convergent.

$$L = \frac{\pi Q}{l \sqrt{3g} \left(\frac{y_1 + y_0}{2} - \frac{Q^2}{gl^2 y_1 y_0} \right)} \left(1 + \frac{3}{16} K^2 + \dots \right)$$

Lorsque l'amplitude des ondulations $y_1 - y_0$ est faible, K est petit, la ligne d'eau est sensiblement sinusoïdale et la demi-longueur d'onde est donnée sensiblement par le premier terme du développement.

DÉTERMINATION DE LA LIGNE D'EAU LORSQU'ON TIEN COMPTE DU FROTTEMENT.

La ligne d'eau est alors une solution $y = y(x)$ du système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{Q^2}{6gl^2} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{Q^2}{2gl^2 h^2} \\ \frac{dH}{dx} = - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \end{cases}$$

La charge H et la fonction M ne restent pas constantes, mais leurs valeurs dans la section amont, où la hauteur d'eau est h , ont des valeurs déterminées :

$$\begin{aligned} H(h) &= \mathcal{H} \\ M(h) &= \frac{\mathcal{H}^2}{2} + \frac{Q^2}{16gl^2 \mathcal{H}} \left(11 - \frac{3h}{\mathcal{H}} \right) \end{aligned}$$

La hauteur d'eau h satisfaisant encore à l'équation :

$$h + \frac{Q^2}{2gl^2 h^2} = \mathcal{H}$$

De $H(h)$ et $M(h)$ on déduit la pente de la ligne d'eau sur le seuil :

$$\frac{Q^2}{6gl^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=h}^2 = H(h) h^2 - \frac{h^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} - M(h) h$$

équation dont il faut prendre la racine négative.

La ligne d'eau est ainsi la courbe intégrale du système précédent qui satisfait aux conditions de CAUCHY :

$$x = 0 \quad y = h = \sigma \mathcal{H} \quad H(h) = \mathcal{H}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=h} = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(1-\sigma)(3\sigma-2)(2-\sigma)}{2\sigma}}$$

Pour une charge amont donnée $\mathcal{H}$, les lignes d'eau correspondant aux différents débits Q passant sur le seuil sont ainsi parfaitement déterminées, chacune d'elles correspondant à une condition aval particulière (par exemple la hauteur d'eau dans le réservoir aval).

La forme de la ligne de remous se déduit de l'allure de la courbe (C) qui la représente dans le plan HOy .

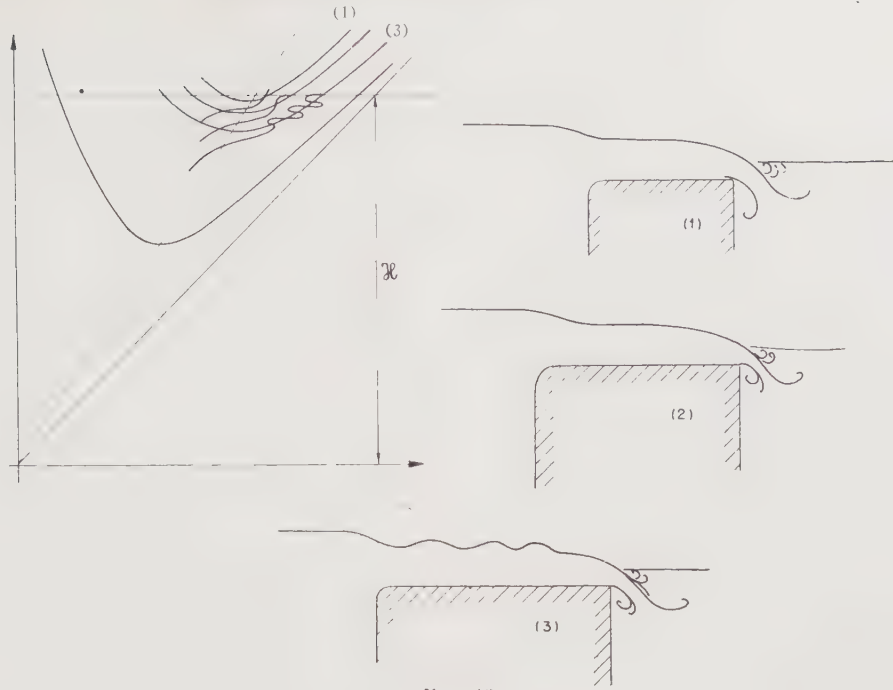


FIG. 42

La figure 42 donne pour une charge amont $\mathcal{H}$ le tracé des courbes (C) correspondant à diverses valeurs du débit Q . La pente de la tangente à (C) au point B $y = h = \sigma \mathcal{H}$ a pour valeur :

$$\left(\frac{dH}{dy}\right)_{y=h} = \frac{dH}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{4g}{c^2} \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{3\sigma(3\sigma-2)(2-\sigma)}}$$

Il ne peut y avoir de nappe ondulée que si la pente de la tangente en B à la courbe (C) est inférieure à la pente de la tangente à la courbe (H) d'équation $H = y + (Q^2/2gl^2y^2)$, c'est-à-dire si le débit Q n'est pas trop voisin de Q_m .

La pente de la tangente à la ligne de remous, dy/dx , au point d'ordonnée y , est donnée par l'équation intégrale-différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{6gl^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \frac{Q^2}{6gl^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{y=h} \\ &+ \int_h^y \left(H - y - \frac{Q^2}{2gl^2y^2}\right) dy \end{aligned}$$

La pente de la tangente à la ligne d'eau théorique, $(dy/dx)_t$, lorsqu'on néglige le frottement, serait donnée par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{6gl^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx}\right)_t^2 &= \frac{Q^2}{6gl^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{y=h} \\ &+ \int_h^y \left(\mathcal{H} - y - \frac{Q^2}{2gl^2y^2}\right) dy \end{aligned}$$

Comme, par suite du frottement, $H(y)$ est inférieur à $\mathcal{H}$, on en déduit que les points bas de la ligne de remous sont situés en dessous des points bas de la ligne d'eau théorique.

Lorsque le débit Q est voisin de 0, l'amplitude des ondulations et leur longueur d'onde diminuent considérablement, la courbe (C) est pratiquement confondue avec (H), des phénomènes de tension superficielle empêchent la formation des ondulations.

Les lignes de remous correspondant à une charge amont $\mathcal{H}$, pour diverses valeurs de débit Q , sont représentées sur la figure 42.

L'intégration des équations précédentes est impossible. Cependant, la détermination approchée de la ligne d'eau peut se faire, lorsque la nappe n'est pas ondulée, par une méthode aux différences finies à partir du système :

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{6gl^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= Hy^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{Q^2}{2gl^2} - My \\ \frac{dH}{dx} &= - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3} \\ \frac{dM}{dx} &= - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^2} \end{aligned} \quad (20)$$

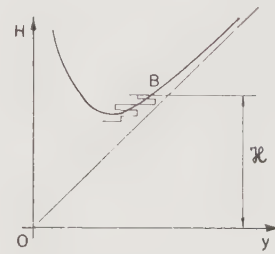


FIG. 43

qui, on le démontre aisément, est équivalent aux systèmes (8) et (9).

La courbe de remous est définie par la solution du système précédent satisfaisant pour $x = 0$ aux conditions de CAUCHY :

$$y = h \quad H = H(h) = \mathcal{H} \quad M = M(h)$$

Dans le cas d'une nappe ondulée, il est préférable d'utiliser une autre méthode d'intégration approchée, basée sur la remarque suivante : entre deux sommets de la courbe de remous, la charge H varie extrêmement peu, on peut donc la considérer comme constante. Cela revient à remplacer la courbe (C) du plan HOy par une ligne en escaliers formée de segments de droites (voir fig. 43). D'après les résultats du paragraphe précédent, les abscisses y_{0n} , y_{1n} des extrémités d'un segment horizontal d'ordonnée H_n sont liées par la relation :

$$H_n = \frac{y_{0n} + y_{1n}}{2} + \frac{Q^2}{2 g l^2 y_{0n} y_{1n}} \quad (21)$$

relation dont l'interprétation géométrique a déjà été précisée.

Les aires hachurées sur la figure 44 sont égales.

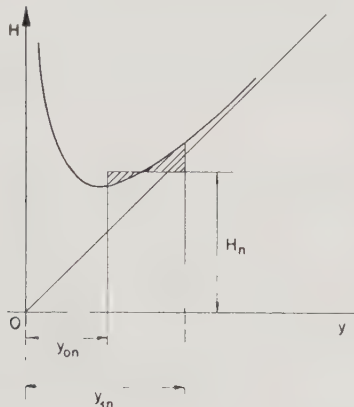


FIG. 44

Le premier point bas de la ligne d'eau, correspondant à la hauteur d'eau y_{01} , se détermine à l'aide des considérations exposées au paragraphe précédent. y_{01} est la racine moyenne de l'équation du troisième degré $F(y/\mathcal{H}) = 0$. L'abscisse x_0 du point correspondant de la ligne d'eau est donnée par une intégrale elliptique.

La charge H_0 dans cette section se déduit par une intégration aux différences finies de la relation différentielle :

$$\frac{dH}{dx} = - \frac{Q^2}{c^2 l^2 y^3}$$

lorsque x varie de 0 à x_0 , la valeur de H pour $x = 0$ étant $\mathcal{H}$.

La hauteur y_{11} du premier point haut de la courbe de remous se déduit de la relation (21) où l'on fait $y_{0n} = y_{01}$ et $H_n = H_0$.

On obtient une équation du second degré en y_{11} dont il convient de prendre la racine la plus élevée. L'abscisse de ce point est $x_0 + L_0$, L_0 étant donné par l'intégrale elliptique :

$$L_0 = \frac{Q}{l \sqrt{3g}} \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1+Kn)}}}{\left(\frac{y_{01} + y_{11}}{2} - \frac{Q^2}{gl^2 y_{01} y_{11}} \right)}$$

On détermine ainsi de proche en proche les abscisses et les ordonnées des différents sommets de la ligne d'eau. L'examen de la figure 43 montre que ces ordonnées vont en diminuant et que les ondulations disparaissent lorsque la hauteur d'eau se rapproche de la hauteur critique. La ligne de remous peut alors se déterminer par une intégration aux différences finies du système (20); on voit sur la figure 43 que la courbe (C) est située au-dessous de (H) et que l'aire comprise entre ces deux courbes croît rapidement lorsque y décroît. $(dy/dx)^2$ augmente donc, et comme la pente dy/dx est négative, elle décroît lorsque x augmente. La hauteur d'eau dans une section diminue donc très vite à mesure que cette section se rapproche de l'extrémité aval du seuil.

Il reste à examiner les conditions limites auxquelles doit satisfaire la ligne d'eau à l'extrémité.

CONDITIONS AUX LIMITES A L'EXTRÉMITÉ AVAL.

Nous supposons que le déversoir communique à l'aval avec un réservoir de grande capacité où le niveau du plan d'eau peut occuper une position quelconque par rapport au seuil.

Nous désignerons éventuellement par h_a la cote du plan d'eau dans le réservoir au-dessus du radier du déversoir et par y_a la hauteur d'eau à l'extrémité aval du seuil. Lorsque h_a est négatif (fig. 45), la pression atmosphérique règne sous la face inférieure de la nappe lorsque l'air a librement accès sous celle-ci (écoulement en

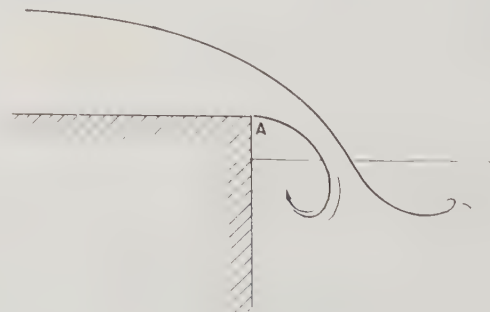


FIG. 45

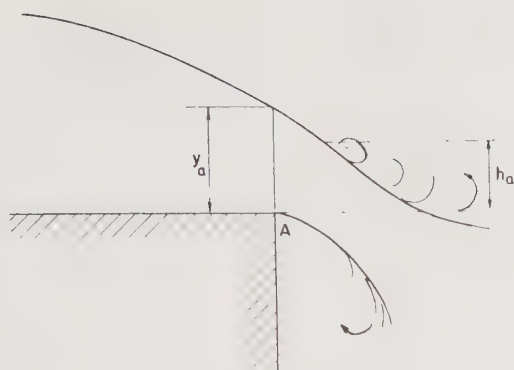


FIG. 46

nappe libre). Il faut donc écrire que la pression est nulle au point A de la section extrême.

Lorsque h_a est positif, A est toujours point de décollement et il existe directement à l'aval du déversoir une zone de fluide mort qui ne participe pas à l'écoulement. Il faudra donc écrire que la pression au point A est égale à h_a .

En se reportant à l'équation (5), qui donne la pression en un point d'une section en fonction de la cote de ce point au-dessus du radier, on est conduit à la relation (dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses normales) :

$$h_a = y_a + \frac{Q^2}{2 g l^2 y_a} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y_a} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]_{y=y_a}$$

La comparaison avec l'équation qui définit la fonction $M(y)$:

$$M(y_a) = \frac{y_a^2}{2} + \frac{Q^2}{g l^2 y_a} + \frac{Q^2}{3 g l^2 y_a} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y_a} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]_{y=y_a}$$

conduit à une relation entre la hauteur d'eau y_a et la fonction $M(y_a)$ dans la section aval du seuil :

$$M(y_a) = \frac{Q^2}{g l^2 y_a} - \frac{y_a^2}{6} + \frac{2}{3} h_a y_a$$

Cette relation, valable lorsque $h_a > 0$, constitue la condition limite aval. Dans l'hypothèse d'un écoulement en nappe libre, il convient évidemment de faire $h_a = 0$.

Il est donc possible de déterminer la hauteur d'eau h_a dans le réservoir qui correspond au passage d'un débit Q sur le déversoir et la hauteur d'eau y_a à l'extrémité du seuil.

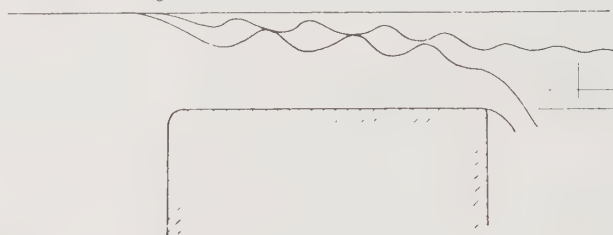


FIG. 48

COMPARAISON ENTRE L'ÉTUDE THÉORIQUE D'UNE NAPPE ONDULÉE SUR UN DÉVERSOIR A SEUIL ÉPAIS ET LES RÉSULTATS OBTENUS EXPÉRIMENTALEMENT

Ces essais, entrepris au laboratoire par M. TISON, professeur à l'Université de Gand, concernent, en particulier, les caractéristiques (amplitude, longueur d'onde) des nappes ondulées obtenues sur un déversoir à seuil épais pour diverses charges amont.

CARACTÉRISTIQUES DU DÉVERSOIR, RÉSULTAT DES ESSAIS.

largeur $l = 0,50$ m, longueur $1,80$ m, pente $i = 0$ plan d'eau aval situé au-dessous du seuil (écoulement en nappe libre).

Le rayon de courbure du raccordement du seuil avec la paroi verticale d'amont est suffisant pour éviter tout décollement sous les charges envisagées.

Le seuil est rendu rugueux par cimentage avec

sable très rude, il correspond à un coefficient de BAZIN $\gamma = 0,41$.

Les débits et les longueurs d'ondes des onduations obtenues pour diverses charges amont, comptées à partir du seuil déversant, sont précisés dans le tableau ci-après.

TABLEAU I

Charge amont H (mètres)	Débit Q (m ³ /s)	Longueur d'onde $2L$ (mètres)
0,0672	0,0115	0,135
0,0875	0,0180	0,200
0,1210	0,0308	0,300
0,1400	0,0396	0,365

La figure I donne pour le même déversoir et la charge amont $\mathcal{H} = 0,1400$, le tracé de la ligne d'eau déterminée expérimentalement au laboratoire (en trait plein); la ligne en traits mixtes

est celle obtenue à partir de la théorie des écoulements graduellement variés, la hauteur critique étant atteinte à l'extrémité aval du seuil.

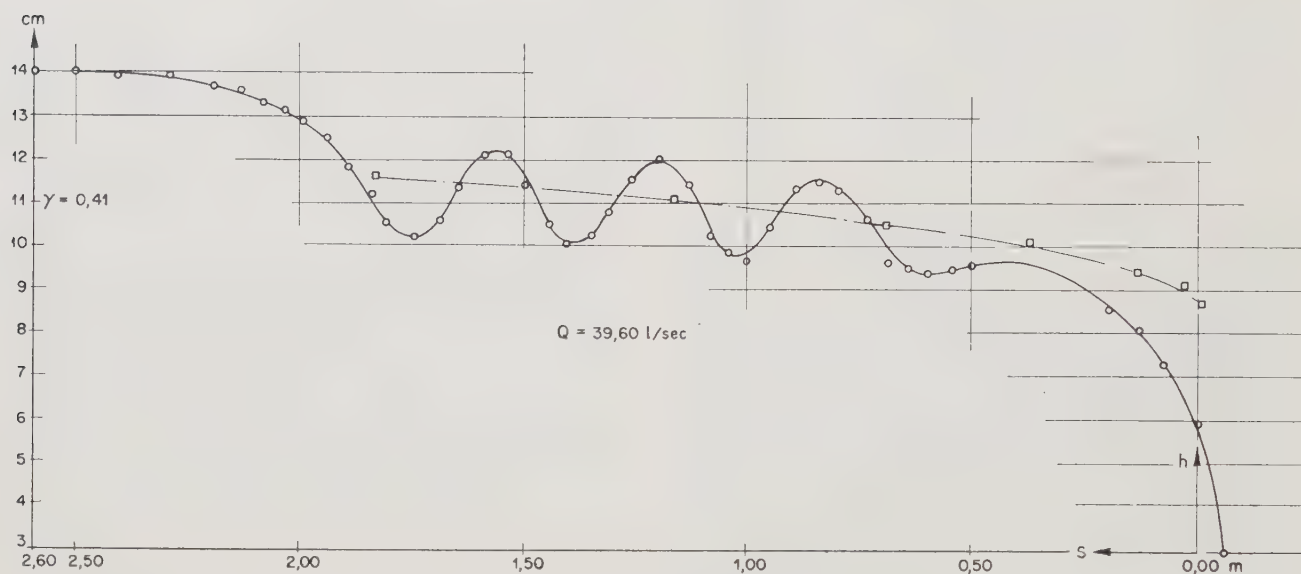


FIG. I

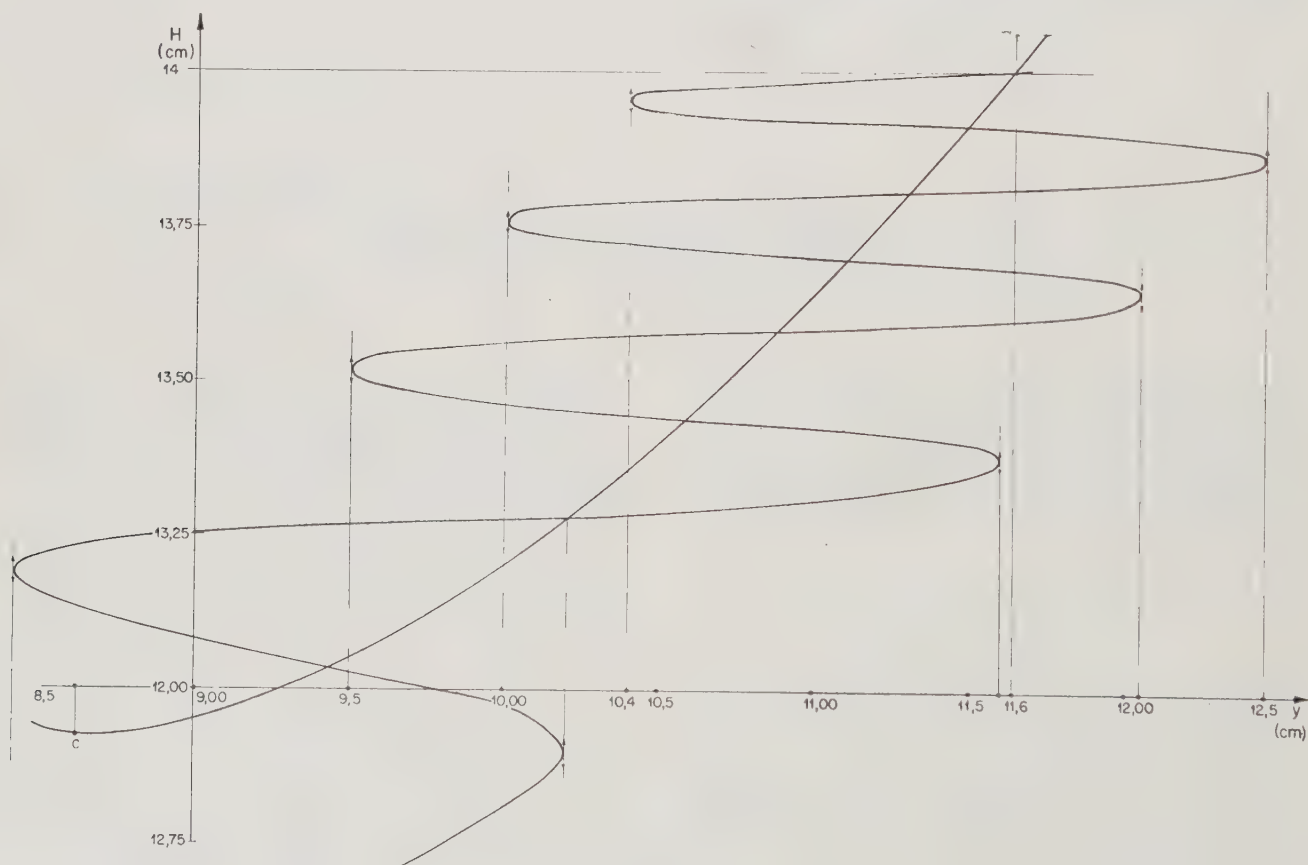


FIG. II

RÉSULTATS THÉORIQUES DÉDUITS
DES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES.

Nous avons calculé, pour les diverses valeurs mesurées de la charge $\mathcal{H}$ et du débit Q , l'amplitude et la longueur d'onde théorique des ondulations, en supposant la charge constante sur le déversoir et égale à la charge amont $\mathcal{H}$.

1. — Caractéristiques des ondulations en supposant la charge constante sur le déversoir.

Notations

h = hauteur d'eau sur le seuil amont du déversoir;

$\mathcal{H}$ = charge amont;

$q = \frac{Q}{l}$ = débit par mètre linéaire;

y_0 = ordonnée du point bas de la ligne d'eau;

y_1 = ordonnée du point haut de la ligne d'eau;

$a = y_1 - y_0$ = amplitude des ondulations;

$2L$ = longueur d'onde des ondulations.

Nous utiliserons pour les calculs les variables sans dimensions suivantes :

$$\sigma = \frac{h}{\mathcal{H}} \quad m = \frac{q}{\mathcal{H} \sqrt{2g\mathcal{H}}}$$

$$u_0 = \frac{y_0}{\mathcal{H}} \quad u_1 = \frac{y_1}{\mathcal{H}}$$

σ est la racine de l'équation :

$$\sigma^2 (1 - \sigma) = m^2$$

qui correspond au régime fluvial.

u_0 et u_1 , les deux racines les plus élevées de l'équation du troisième degré :

$$-u^3 + 2u^2 - \left[1 + \frac{m^2}{4}(11 - 3\sigma) \right] u + 2m^2 = 0$$

La longueur d'onde est donnée par la relation :

$$2L = \frac{2\pi q}{\sqrt{3g \left(\frac{y_1 + y_0}{2} - \frac{q^2}{gy_1 y_0} \right)}} \left[1 + \frac{3K^2}{16} \right]$$

avec :

$$K = \frac{y_1 - y_0}{y_1 + y_0 - \frac{2q^2}{gy_1 y_0}}$$

Dans l'hypothèse d'une charge amont :

$$\mathcal{H} = 0,1400 \text{ m}$$

correspondant au débit $Q = 0,0396 \text{ m}^3/\text{s}$, nous avons déterminé la ligne d'eau à partir de nos équations en tenant compte des pertes de charge et calculé en particulier les ordonnées des sommets de la courbe de remous et la longueur d'onde des diverses ondulations.

En tenant compte de la relation :

$$\mathcal{H} = \frac{y_1 + y_0}{2} + \frac{q^2}{2gy_1 y_0}$$

qui s'écrit en variables sans dimensions :

$$1 = \frac{u_1 + u_0}{2} + \frac{m^2}{u_0 u_1}$$

les valeurs de L et K sont données par les expressions :

$$K = \frac{u_1 - u_0}{3(u_1 + u_0) - 4}$$

$$2L = \frac{4\pi \mathcal{H} m}{\sqrt{9(u_1 + u_0) - 12}}$$

Les valeurs de a et $2L$ obtenues par le calcul à partir des données mesurées $\mathcal{H}$ et Q du tableau I sont précisées dans le tableau II.

TABLEAU II

$\mathcal{H}_{(m)}$	0,0672	0,0875	0,1210	0,1400
$q = Q/l_{(m^3/s)}$	0,0230	0,0360	0,0616	0,0792
m^2	0,08885	0,09860	0,10917	0,11651
σ	0,8871	0,8696	0,8484	0,8315
$1 + \frac{m^2}{4}(11 - 3\sigma)$	1,1852	1,20685	1,23075	1,24775
u_0	0,830	0,804	0,771	0,745
u_1	0,943	0,933	0,922	0,912
K	0,086	0,107	0,280	0,354
$a_{(m)}$	0,008	0,011	0,018	0,023
$2L_{(m)}$	0,127	0,182	0,280	0,354

La comparaison avec les valeurs mesurées (tableau I) pour la longueur d'onde des ondulations fait apparaître une différence systématique par

défaut en ce qui concerne les longueurs d'onde calculées, inférieures de 4 à 9 % à celles mesurées. On obtiendrait une meilleure approxima-

tion, en tenant compte des pertes de charge sur le déversoir, comme le montre l'étude de la ligne d'eau pour une charge amont $\mathcal{H} = 0,14$ m.

2. — Détermination théorique de la ligne d'eau dans l'hypothèse d'une charge amont $\mathcal{H} = 0,14$ m

La courbe de remous $y = y(x)$ et la charge sur le déversoir $H = H(x)$ sont les solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{q^2}{6g} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = H - y - \frac{q^2}{2gy^2} \\ \frac{dH}{dx} = - \frac{q^2}{c^2 y^2 R} = -\psi(y) \end{cases}$$

avec les notations suivantes :

$$q = \frac{Q}{l} \text{ débit au mètre linéaire}$$

$$= \frac{0,0396}{0,50} = 0,0792 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R = \text{Rayon hydraulique} = \frac{ly}{l+2y} \quad (l = 0,50)$$

c = Coefficient de CHÉZY donné par la formule de BAZIN avec $\gamma = 0,41$

$$c = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \quad \psi(y) = \frac{q^2}{c^2 y^2 R}$$

Il faut rechercher la solution du système qui satisfait à l'entrée du déversoir ($x = 0$) aux conditions de CAUCHY suivantes :

On connaît, pour $x = 0$,

la charge :

$$H = \mathcal{H} = 0,1400$$

la hauteur d'eau :

$$h = \sigma \mathcal{H} = 0,831 \times 0,1400 = 0,116$$

la fonction d'impulsion :

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\mathcal{H}^2}{2} \right| 1 + \frac{m^2}{4} (11 - 3\sigma) \left| \right. \\ &= \frac{1}{2} \times (0,14)^2 \times 1,24775 = 0,01223 \end{aligned}$$

ce qui revient, nous l'avons vu, à se donner la

pente de la tangente à la ligne d'eau $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{y=h}$ sur le seuil déversant.

La solution correspondante est représentée dans le plan HOy par une courbe (C) dont les sommets parallèles à OH sont situés de part et d'autre de la courbe (H) d'équation $H = y + q^2/(2gy^2)$ représentée figure II.

Soient y_0 et y_1 les ordonnées de deux sommets consécutifs de (C) correspondant respectivement à un point bas et un point haut de la ligne d'eau. En intégrant la première équation, compte tenu de $(dy/dx) = 0$ pour $y = y_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{6g} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 &= \int_{y_0}^y H dy - \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{2gy} \\ &+ \frac{y_0^2}{2} - \frac{q^2}{2gy_0} \end{aligned}$$

Soit H_m la valeur moyenne de la charge dans l'intervalle $y_0 y_1$, définie par l'expression :

$$H_m = \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} H dy$$

en écrivant que $(dy/dx) = 0$, pour $y = y_1$, on obtient une relation entre les ordonnées de deux sommets consécutifs de la ligne d'eau et la charge moyenne dans l'intervalle :

$$H_m = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{q^2}{2gy_0 y_1} \quad (R)$$

L'ordonnée y_{00} du premier point bas à partir des considérations exposées au paragraphe I :

$$y_{00} = u_0 \mathcal{H} = 0,745 \times 0,14 = 0,104$$

son abscisse est sensiblement égale au quart de la longueur d'onde théorique, soit $L/2 = 0,090$.

La variation de la charge entre l'entrée du déversoir et le premier point bas s'obtient à partir de la deuxième équation :

$$\frac{dH}{dx} = -\psi(y),$$

en posant :

$$\Delta H = - \frac{1}{4} L [\psi(h) + \psi(y_{00})]$$

(voir tableau III)

La détermination de l'abscisse et de l'ordonnée y_{10} du premier point haut, ainsi que la charge en ce point se fait par une méthode d'approximations successives à partir de la relation (R).

On se donne une valeur de la charge moyenne, entre les deux premiers sommets consécutifs, H'_m légèrement inférieure à la charge H_{00} au point d'ordonnée y_{00} . On obtient de la sorte une première valeur approchée y'_{10} de l'ordonnée du premier point haut qui est la plus grande racine de l'équation :

$$H'_m = \frac{y_{00} + y}{2} + \frac{q^2}{2g y_{00} y}$$

On en déduit une première valeur de la demi-longueur d'onde :

$$L' = \frac{\pi q}{\sqrt{\frac{3g(y_{00} + y'_{10})}{2} - \frac{q^2}{g y_{00} y'_{10}}}} \left[1 + \frac{3K^2}{16} + \dots \right]$$

et une variation de la charge outre les deux points, donnée, à partir de l'équation 2, par l'expression :

$$\Delta H' = -\frac{1}{2} L' [\psi(y_{00}) + \psi(y'_{10})]$$

d'où l'on tire une valeur $H''_m = H_{00} - (\Delta H'/2)$ de la charge moyenne entre les deux sommets. Si cette valeur ne coïncide pas avec H'_m , on recommence le calcul précédent en partant de la nouvelle valeur H''_m . La convergence est rapide.

Les résultats définitifs sont représentés sur le tableau ci-après :

TABLEAU III

y	$\Psi(y)$	L	ΔH	$H(y)$	H_m
$h=0,116$	0,00469			0,1400	
$y_{00}=0,104$	0,00655	0,090	— 0,00051	0,13949	
$y_{10}=0,125$	0,00373	0,181	— 0,00093	0,13856	0,1390
$y_{01}=0,100$	0,00745	0,186	— 0,00104	0,13752	0,1380
$y_{11}=0,121$	0,00412	0,192	— 0,00111	0,13641	0,1370
$y_{02}=0,095$	0,00872	0,200	— 0,00128	0,13513	0,1358
$y_{12}=0,116$	0,00469	0,211	— 0,00141	0,13372	0,1344
$y_{03}=0,084$	0,00984	0,250	— 0,00182	0,13190	0,1328
$y_{13}=0,102$	0,00700	0,344	— 0,00290	0,12900	0,1304

La comparaison avec les valeurs mesurées pour les ordonnées des sommets fait apparaître une bonne concordance avec les valeurs dédui-

tes du calcul, sauf en ce qui concerne la dernière ondulation (voir tableau IV), la méthode approchée utilisée, qui consiste à utiliser la valeur moyenne de la charge, conduisant à une valeur trop élevée pour la longueur d'onde de l'ondulation.

TABLEAU IV

Valeur mesurée...	0,104	0,122	0,100	0,120	0,097	0,116	0,094	0,097
Valeur calculée...	0,104	0,125	0,100	0,121	0,095	0,116	0,084	0,102

La longueur d'onde calculée pour la première ondulation déduite du tableau III :

$$2L = 0,181 + 0,186 = 0,368$$

donne une valeur peu différente de celle mesurée 0,365.

La courbe figurative (C) de la solution du système différentiel dans le plan HOy est représentée sur la figure II, sur laquelle a été tracée également la courbe (H) d'équation :

$$H = y + \frac{q^2}{2g y^2}$$

qui passe par un minimum :

$$H_c = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{q^2}{g}} = 0,1292$$

pour la hauteur critique :

$$y_c = \sqrt{\frac{3}{g} \frac{q^2}{g}} = 0,0861$$

L'étude théorique du système montre que les ondulations ne peuvent exister lorsque la charge devient inférieure à la charge critique $H_c=0,1292$. Cette éventualité se produit dans la partie aval du déversoir; la quantité $H - y - (q^2/2g y^2)$ devient négative et va en augmentant en valeur absolue. La courbe (C) est alors située au-dessous de (H) et l'effet de courbure prend une valeur particulière.

L'expérience confirme ce résultat théorique; elle montre en effet que la théorie des « écoulements graduellement variés » n'est pas applicable à la portion aval du déversoir. Dans la portion amont, cette théorie permet de préciser la hauteur moyenne de la ligne d'eau sans donner aucun renseignement sur la longueur d'onde et l'amplitude des ondulations.

La théorie de seconde approximation donne des résultats plus conformes à l'expérience. Elle permet de montrer qu'à l'extrémité aval du déversoir, la hauteur d'eau et la charge sont, pour un écoulement en nappe libre, inférieurs à la

hauteur et à la charge critique. Elle permet de préciser le nombre, la longueur d'onde et l'amplitude des ondulations de la surface libre.

La longueur d'onde est fonction de la charge

amont et du coefficient de débit; l'amplitude dépend de la valeur que prend la fonction d'impulsion sur le seuil déversant, c'est-à-dire de la poussée sur la paroi amont du déversoir.

V. — ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS EN RÉGIME VARIABLE

1. — Equations aux dérivées partielles des écoulements variables.

Nous nous proposons d'établir les équations aux dérivées partielles qui régissent la ligne d'eau en mouvement variable dans l'hypothèse d'un canal prismatique de section rectangulaire, de faible pente et de grande largeur.

Comme dans l'étude des écoulements permanents, nous étudierons le mouvement du fluide par rapport à des axes rectangulaires Ox dirigé vers le bas suivant l'axe du radier, Oz perpendiculaire au radier dirigé vers le haut.

Nous adopterons les notations suivantes : $y(x, t)$ hauteur d'eau dans la section d'abscisse x ; $u(z, x, t)$, $w(z, x, t)$ composantes sur les axes Ox et Oz de la vitesse du fluide au point de cote z de la section d'abscisse x .

$q(x, t) = Q/l$ débit par unité de largeur dans la section d'abscisse x :

$$q = \int_0^y u \, dz$$

$$U(x, t) = \frac{q}{y} = \frac{1}{y} \int_0^y u \, dz$$

vitesse moyenne dans la section d'abscisse x .

La surface libre du fluide n'est plus ici une ligne de courant, mais une trajectoire. Sur cette surface limite mobile u , w et y ne sont donc pas indépendants et doivent satisfaire à la condition :

$$w(y, x, t) = u(y, x, t) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \quad (20)$$

u et w satisfont à l'équation de continuité.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

qui exprime que l'intégrale curviligne :

$$\int_{(C)} \bar{V} \cdot \bar{n} \, ds$$

étendue à un contour (C) quelconque tracé dans le fluide est nulle. Cette condition doit donc s'appliquer au contour particulier représenté sur la figure 49.

Considérons la portion de fluide comprise entre les deux sections normales infiniment voisines d'abscisse x et $x + dx$, le radier et la

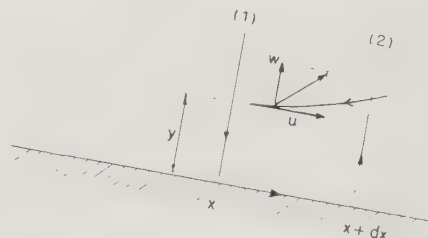


FIG. 49

surface libre. Ces deux sections limitent sur la surface libre un élément d'arc ds .

La vitesse du fluide à la surface et la normale extérieure sont définies par les vecteurs :

$$\bar{V} = u(y, x, t) \bar{x} + w(y, x, t) \bar{z}$$

$$\bar{n} = \frac{dx}{ds} \left[-\frac{\partial y}{\partial x} \bar{x} + \bar{z} \right]$$

l'intégrale curviligne $\int_{(C)} \bar{V} \cdot \bar{n} \, ds$ étendue à ce contour s'écrit donc :

$$q(x + dx, t) - q(x, t) +$$

$$\left[-u(y, x, t) \frac{\partial y}{\partial x} + w(y, x, t) \right] dx = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + w(y, x, t) - u(y, x, t) \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

ou en tenant compte de (20) :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

Appliquons maintenant le théorème des quantités de mouvement à la portion de fluide com-

prise entre les sections (1) et (2). En projection sur l'axe Ox , il vient :

$$\begin{aligned} & \iint_{(2)} \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{g} \right) d\sigma - \iint_{(1)} \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{g} \right) d\sigma \\ & + \frac{1}{g} u(y, x, t) \bar{V} \cdot \bar{n} ds \\ & + \iiint_{(\delta)} \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = \left[iy - \frac{\tau_0}{\rho g} \right] dx \end{aligned}$$

L'écoulement étant plan, le fluide est supposé limité par deux plans verticaux parallèles à Ox et distants de l'unité de longueur. τ_0 est la force de frottement sur le radier par unité de surface.

$\rho u(y, x, t) \bar{V} \cdot \bar{n} ds$ représente le débit de quantité de mouvement à travers l'élément $1 \times ds$ de la surface libre compris entre les sections (1) et (2). Nous avons vu que :

$$\bar{V} \cdot \bar{n} ds = \left[w(y, x, t) - u(y, x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \right] dx = \frac{\partial y}{\partial t} dx$$

Ce débit de quantité de mouvement a donc pour valeur :

$$\rho u(y, x, t) \frac{\partial y}{\partial t} dx$$

l'intégrale triple :

$$\iiint_{(\delta)} \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau$$

est étendue au volume du fluide compris entre les sections (1) et (2) et les deux plans verticaux parallèles à Ox et distants de l'unité. (1) et (2) étant infiniment voisins et l'écoulement plan, cette intégrale se réduit à l'intégrale simple :

$$\frac{dx}{g} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial t} dz$$

quant à l'intégrale double :

$$\iint_{(1)} \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{g} \right) d\sigma,$$

étendue à l'aire de la section (1), elle est donnée par l'intégrale simple :

$$\int_0^y \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{g} \right) dz$$

Nous poserons, comme dans l'étude des mouvements permanents :

$$M(x, t) = \int_0^y \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{g} \right) dz$$

Dans ces conditions, le théorème des quantités de mouvement en projection sur Ox s'écrit :

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{g} u(y, x, t) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{g} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial t} dz = iy - \frac{\tau_0}{\rho g}$$

en se reportant à la formule de définition du débit par unité de longueur :

$$q = \int_0^y u dz$$

on voit immédiatement que la formule de dérivation sous le signe somme donne :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial t} dz + u(y, x, t) \frac{\partial y}{\partial t}$$

et l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial q}{\partial t} = iy - \frac{\tau_0}{\rho g}$$

Pour le calcul de l'intégrale :

$$\int_0^y \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{g} \right) dz$$

nous admettrons que la répartition des pressions dans la section normale (1) d'abscisse x est la même que si le fluide était parfait; elle est donc donnée par l'équation :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 - \frac{u}{g} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w}{g} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t}$$

Quant à la répartition des vitesses normales u dans la section, nous la supposons également donnée par la relation :

$$\frac{u(z, x, t)}{U(y, t)} = F' \left(\frac{z}{y} \right)$$

où U désigne la vitesse moyenne dans la section, et $F(\alpha)$ une fonction dont la dérivée caractérise la courbe de répartition des vitesses en coordonnées sans dimensions. Ceci revient à admettre que cette courbe est indépendante de la section envisagée.

$F(\alpha)$ ne peut d'ailleurs être choisie arbitrairement. En effet :

$$q = Uy = \int_0^y u dz = U \int_0^y F' \left(\frac{z}{y} \right) dz$$

ou en posant :

$$\frac{z}{y} = \alpha \quad 1 = \int_0^1 F'(\alpha) d\alpha$$

ou en prenant pour $F(\alpha)$ la fonction primitive de $F'(\alpha)$ qui s'annule pour : $\alpha = 0$ $F(1) = 1$.

Nous avons donc $F(0) = 0$ $F(1) = 1$.

Dans ces conditions, la composante verticale de la vitesse se calcule à partir de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

en faisant intervenir la fonction de courant $\psi(z, x, t)$ qui satisfait aux deux relations :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

on a donc :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = u = U F' \left(\frac{z}{y} \right) = \frac{q(x, t)}{y} F' \left(\frac{z}{y} \right)$$

ou en intégrant :

$$\psi = q F \left(\frac{z}{y} \right) + f(x, t)$$

la fonction arbitraire $f(x, t)$ étant déterminée par les conditions aux limites. On en déduit :

$$w = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{q}{y^2} z \frac{\partial y}{\partial x} F' \left(\frac{z}{y} \right) - \frac{\partial q}{\partial x} F \left(\frac{z}{y} \right) + f'_x(x, t)$$

Il reste à satisfaire aux conditions, aux limites.

Au fond $z = 0$, on doit avoir : $w = 0$;

En tenant compte de la condition $F(0) = 0$, il vient :

$$f'_x(x, t) = 0;$$

par suite :

$$w = \frac{q z}{y^2} \frac{\partial y}{\partial x} F' \left(\frac{z}{y} \right) - \frac{\partial q}{\partial x} F \left(\frac{z}{y} \right)$$

qui peut également s'écrire :

$$w(z, x, t) = u(z, x, t) \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{z}{y} - \frac{\partial q}{\partial x} F \left(\frac{z}{y} \right)$$

Sur la surface libre $z = y$, w doit également satisfaire à la relation (20) :

$$w(y, x, t) = u(y, x, t) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}$$

cette condition, compte tenu de $F(1) = 1$, conduit précisément à l'équation (21) :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

qui apparaît ainsi comme une condition aux limites de l'équation de continuité.

La répartition des vitesses dans la section d'abscisse x est ainsi donnée par les relations :

$$u = \frac{q}{y} F' \left(\frac{z}{y} \right)$$

$$w = q \frac{z}{y^2} \frac{\partial y}{\partial x} F' \left(\frac{z}{y} \right) - \frac{\partial q}{\partial x} F \left(\frac{z}{y} \right)$$

La répartition des pressions dans la section s'obtient en reportant les valeurs de u et w dans l'équation :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 - \frac{u}{g} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w}{g} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t}$$

L'intégration, compte tenu de la condition à la surface libre $p = 0$ pour $z = y$, nous donnera la valeur de la pression en tout point de la section.

Le calcul se poursuit de la même façon que pour les écoulements permanents et donne en définitive la valeur de la quantité.

$$M(x) = \int_0^y \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{g} \right) dz$$

en fonction de q , de y et de leurs dérivées.

Nous nous placerons désormais dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses dans la section. Cette hypothèse est valable pour l'étude de la houle et des intumescences de longueur variable dans un canal de faible profondeur, phénomènes que nous nous proposons d'étudier; elle ne s'appliquerait pas par contre à l'étude de la houle en eau profonde, mais on pourrait dans ce cas admettre une répartition des vitesses plus conforme à la réalité.

Cela revient à poser :

$$F'(x) = 1 \quad F(x) = x$$

Les calculs se simplifient considérablement en prenant pour fonctions inconnues, au lieu du débit $q(x, t)$, la composante horizontale de la vitesse $u(x, t)$ dans la section envisagée qui coïncide ici avec la vitesse moyenne $U(x, t)$.

La composante verticale de la vitesse w a alors pour valeur :

$$w = q \frac{z}{y^2} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{z}{y} \frac{\partial q}{\partial x}$$

ou, en tenant compte de la relation $q = uy$:

$$w = -z \frac{\partial u}{\partial x}$$

en portant dans la relation :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 - \frac{u}{g} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{w}{g} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

on obtient :

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} = -1 - z \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]$$

L'intégration, compte tenu de la condition à la surface $p = 0$ pour $z = y$, conduit à l'expression :

$$\frac{p}{\rho g} = -z + y + \frac{y^2 - z^2}{2g} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]$$

Le calcul de l'intégrale :

$$\int_0^y \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{g} \right) dz$$

s'effectue alors immédiatement; on obtient :

$$M(x) = \frac{y^2}{2} + \frac{u^2 y}{g} + \frac{y^3}{3g} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]$$

Les équations aux dérivées partielles de la ligne d'eau s'écrivent alors, compte tenu de la valeur de la force de frottement sur le radier :

$$\begin{cases} M = \frac{y^2}{2} + \frac{u^2 y}{g} + \frac{y^3}{3g} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] \\ \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (u y) = i y - \frac{u^2}{c^2(y)} \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u y) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Les équations (22) constituent une généralisation des équations de BARRÉ-DE-SAINT-VENANT, lorsqu'on tient compte de l'inclinaison et de la courbure des filets liquides.

Nous en ferons une application à l'étude des intumescences qui se propagent le long du canal avec une célérité constante V .

2. — Equations différentielles des intumescences à célérité constante.

Le temps t et l'abscisse x ne figurant pas explicitement dans les équations (22), ces dernières admettent des solutions où l'une quelconque des quantités y , u , M est fonction de la seule variable $x - Vt$, où V est une constante donnée qui caractérise la vitesse de propagation.

Ces solutions :

$$y = y(x - Vt) \quad u = u(x - Vt) \quad M = M(x - Vt)$$

sont les intégrales d'un système différentiel qui se déduit immédiatement des équations (22).

On a, en effet :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -V \frac{\partial y}{\partial x}$$

La troisième équation (22) s'écrit alors :

$$\frac{d(u y)}{dx} - V \frac{dy}{dx} = 0$$

ou, en intégrant :

$$u = V + \frac{q}{y} \quad (23)$$

q étant une constante arbitraire dont la signification mécanique est évidente. q est le débit du fluide par mètre linéaire à travers une sec-

tion se déplaçant dans le canal avec une vitesse constante égale à la célérité de propagation V .

En reportant la valeur de u tirée de (23) dans la première équation (22), on obtient :

$$M = \frac{y^2}{2} + \frac{u^2 y}{g} + \frac{q^2}{3g} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \quad (24)$$

La deuxième équation s'écrit, par ailleurs, en tenant compte de la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t} (u y) = -V \frac{d(u y)}{dx} = -V^2 \frac{dy}{dx} \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} \left[M - \frac{V^2 y}{g} \right] = i y - \frac{u^2}{c^2(y)}$$

La comparaison avec (24), écrite sous la forme :

$$M - \frac{V^2 y}{g} - 2 q V = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{g y} + \frac{q^2}{3g} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

nous conduit à faire intervenir la nouvelle fonction inconnue :

$$F = M - \frac{V^2 y}{g} - 2 q V$$

et à mettre les équations (24) et (25) sous la forme :

$$\begin{cases} F = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{g y} + \frac{q^2}{3 g} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \\ \frac{dF}{dx} = i y - \frac{1}{c^2(y)} \left[V + \frac{q}{y} \right]^2 \end{cases} \quad (26)$$

dont l'analogie avec les équations du régime permanent est évidente.

REMARQUE. — Cette analogie ne se poursuivrait

pas dans l'hypothèse d'une répartition non uniforme de la vitesse dans une section :

L'étude des intumescences se propageant avec une vitesse constante le long d'un canal est donc absolument analogue à celle des lignes d'eau en régime permanent et elle justifie le fait de considérer comme des « ondes stationnaires » les ondulations de surface et le ressaut en régime permanent.

Nous donnerons une première application des équations (26) à la détermination des ondes de translation en deuxième approximation.

3. — Théorie de la houle en eau courante en deuxième approximation.

Considérons un canal rectangulaire de grande largeur de pente i , dans lequel est réalisé un écoulement permanent uniforme de vitesse u_0 .

Nous désignerons par h la hauteur d'eau dans le canal liée à u_0 et i par la relation du régime normal :

$$i h - \frac{u_0^2}{c^2(h)} = 0$$

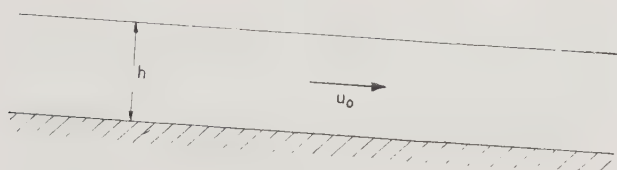


FIG. 50

Nous supposons la vitesse u_0 faible, de telle sorte que le régime soit fluvial dans le canal. Dans les phénomènes ondulatoires dont il est question ici, l'influence du frottement est négligeable de telle sorte que, dans une section où la hauteur d'eau est y et la vitesse u , la quantité $i y - [u^2/c^2(y)]$ est peu différente de 0.

Dans ces conditions, les ondes de translation sont définies par le système différentiel :

$$\begin{cases} F = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{g y} + \frac{q^2}{3 g} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \\ \frac{dF}{dx} = 0 \end{cases}$$

système qui a déjà été intégré dans l'étude du régime permanent. On est conduit à une équation différentielle du premier ordre qui définit, à un instant donné, le profil des ondes de translation :

$$\frac{q^2}{6 g} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = C_1 y^2 - F y - \frac{y^3}{2} + \frac{q^2}{2 g}$$

C_1 , F et q étant trois constantes.

Nous mettrons cette équation sous la forme :

$$\frac{q^2}{3 g} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - y_0)(y_1 - y) \left(y - \frac{q^2}{g y_1 y_0} \right) \quad (27)$$

qui fait intervenir les ordonnées y_0 et y_1 des sommets de la ligne d'eau.

V désignant la vitesse de propagation de la houle par rapport à des axes fixes, considérons une section (Σ) se déplaçant dans le fluide avec la vitesse V , et soient respectivement y la hauteur d'eau et u la composante horizontale de la vitesse absolue du fluide dans la section (Σ) . Le débit par mètre linéaire à travers (Σ) , c'est-à-dire la quantité d'eau qui traverse cette section par

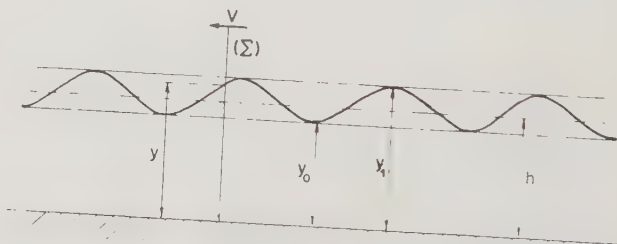


FIG. 51

unité de temps, est relié à u , y , V par la relation (23) :

$$u = V + \frac{q}{y}$$

en particulier pour : $y = h$ $u = u_0$:

$$u_0 = V + \frac{q}{h}$$

nous sommes donc conduit à poser $q = -V_r h$:

$$V = u_0 + V_r$$

V_r désignant la vitesse relative de propagation de la houle par rapport au courant de vitesse u_0 .

L'équation (27) s'écrit dans ces conditions :

$$\frac{V_r^2 h^2}{3g} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - y_0) (y_1 - y) \left(y - \frac{V_r^2 h^2}{g y_1 y_0} \right) \quad (27)$$

et la demi-longueur d'onde de la houle est donnée par l'intégrale définie :

$$L = \frac{V_r h}{\sqrt{3g}} \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(y - y_0) (y_1 - y) \left(y - \frac{V_r^2 h^2}{g y_1 y_0} \right)}}$$

qui, ainsi que nous l'avons vu dans l'étude des ondes stationnaires, se transforme à l'aide du changement de variable :

$$y = \frac{y_1 + y_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{2} u$$

en une intégrale elliptique d'un type classique :

$$L = \frac{V_r h}{\sqrt{3g} \left(\frac{y_1 + y_0}{2} - \frac{V_r^2 h^2}{g y_1 y_0} \right)} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2) (1 + K u)}} \quad (28)$$

avec :

$$K = \frac{y_1 - y_0}{y_1 + y_0 - \frac{2 V_r^2 h^2}{g y_1 y_0}}$$

Les paramètres caractéristiques de la houle, L , V_r , h , y_1 , y_0 ne sont d'ailleurs pas liés par la seule relation (28).

Le phénomène de translation de la surface libre ne correspond pas en effet à un déplacement en masse du fluide, ce déplacement provenant uniquement du courant de vitesse u_0 . Nous obtiendrons donc une nouvelle relation en écrivant que la quantité d'eau qui traverse, pendant une période T , une section fixe déterminée du fluide, est la même que si la houle n'existait pas, ce qui conduit à écrire :

$$\int_t^{t+T} u y dt = u_0 h T$$

or :

$$u y = V y + q = V (y - h) + u_0 h$$

on en déduit :

$$\int_t^{t+T} (y - h) dt = 0$$

Dans la section d'abscisse x_0 , y étant une fonc-

tion de $x_0 - Vt$, un changement de variable évident conduit à la relation :

$$\int_{x_0}^{x_0+2L} (y - h) dx = 0$$

qui exprime que h est l'ordonnée moyenne de la ligne d'eau.

De la symétrie de la ligne d'eau on déduit la relation équivalente :

$$\int_{x_0}^{x_0+L} y dx = h L$$

x_0 étant l'abscisse d'un sommet de la surface libre.

Or, dans l'intervalle $x_0, x_0 + L$, x est une fonction uniforme de y , définie par l'équation à va-

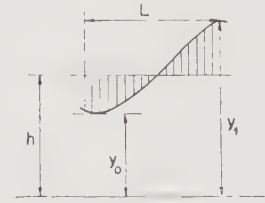


FIG. 52

riable séparée $(dy/dx) = \varphi(y)$ déduite de (27) en choisissant la détermination convenable.

On peut donc prendre y comme variable d'intégration et écrire :

$$h = \frac{\int_{y_0}^{y_1} \frac{y dy}{\varphi(y)}}{\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\varphi(y)}}$$

avec :

$$\varphi(y) = \frac{\sqrt{3g}}{V_r h} \sqrt{(y - y_0) (y_1 - y) \left(y - \frac{V_r^2 h^2}{g y_1 y_0} \right)}$$

Il est intéressant d'utiliser le changement de variable :

$$y = \frac{y_1 + y_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{2} u$$

qui conduit à une relation entre les deux quantités sans dimensions :

$$K = \frac{y_1 - y_0}{y_1 + y_0 - \frac{2 V_r^2 h^2}{g y_1 y_0}}$$

$$\lambda = \frac{y_1 + y_0 - 2h}{y_1 - y_0}$$

on obtient, tous calculs faits :

$$\lambda = - \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{u du}{\sqrt{(1-u^2)(1+Ku)}}}{\int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1+Ku)}}} = \psi(K) \quad (29)$$

Le paramètre K est évidemment positif puisque nous avons supposé $y_1 > y_0$ et que V_r doit satisfaire à la relation évidente d'après (28) :

$$y_1 + y_0 - \frac{2 V_r^2 h^2}{g y_1 y_0} > 0$$

les intégrales définies, qui figurent dans (29), n'ayant un sens que pour $-1 < K < 1$, le paramètre K est nécessairement compris entre 0 et 1.

La fonction $\lambda = \psi(K)$ est donc définie et continue dans l'intervalle 0 et 1, la borne 1 étant exclue. Pour $K = 1$, les intégrales figurant dans

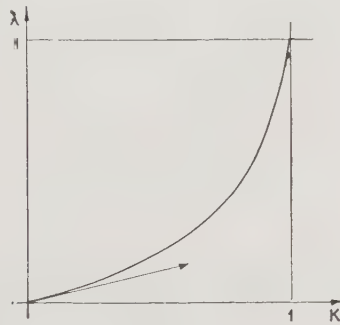


Fig. 53

(29) n'ont en effet pas de sens. Cependant elles tendent vers l'infini lorsque K tend vers 1 par valeurs inférieures et il est facile de montrer que λ tend alors vers 1.

L'équation (29) peut s'écrire en effet :

$$\lambda = 1 - \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{(1+u) du}{\sqrt{(1-u^2)(1+Ku)}}}{\int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1+Ku)}}} = 1 - \frac{f(K)}{g(K)}$$

et on voit aussitôt que lorsque K tend vers 1 par valeurs inférieures, $f(K)$ tend vers π , $g(K)$ tend vers $+\infty$, λ a donc pour limite 1.

λ est d'ailleurs défini dans l'intervalle $-1 < K < 1$ par le développement uniformément convergent :

$$\lambda = \frac{K}{4} + \dots$$

la courbe représentative de la fonction $\lambda = \psi(K)$ est tracée sur la figure 53.

A une valeur de λ , comprise entre 0 et 1, correspond donc une valeur de K unique, égale-

ment comprise entre 0 et 1 et, par suite, deux valeurs de la vitesse relative de propagation V_r égales et de signe contraire. La longueur d'onde de la houle correspondante $2L$ est alors donnée par la relation (28).

Dans un canal rectangulaire de grande largeur où est réalisé un régime permanent uniforme de vitesse u_0 correspondant à une hauteur d'eau h , la vitesse relative V_r de propagation et la longueur d'onde d'une houle, caractérisée par les ordonnées y_0 et y_1 de ses sommets, sont donc parfaitement définies par les équations (28) et (29).

Il existe deux valeurs égales et de signe contraire de la vitesse relative de propagation V_r , correspondant respectivement à une houle montante et à une houle descendante.

V_r est indépendante de la vitesse u_0 du régime permanent et uniforme auquel la houle est superposée. La vitesse absolue de propagation s'obtient par la règle de composition des vitesses, d'après la relation précédemment démontrée :

$$V = u_0 + V_r$$

Avant d'examiner la forme de la houle, dans le cas général, nous étudierons deux cas particuliers importants correspondant aux valeurs extrêmes du paramètre λ : 1 et 0.

CAS $\lambda = 1$. ONDE SOLITAIRE.

Dans l'hypothèse où $\lambda = 1$

$$\frac{y_1 + y_0 - 2h}{y_1 - y_0} = 1,$$

on en déduit $y_0 = h$. L'onde est située tout entière au-dessus de la surface libre, sa vitesse de propagation se déduit de :

$$K = \frac{y_1 - y_0}{y_1 + y_0 - \frac{2 V_r^2 h^2}{g y_1 y_0}} = 1$$

dans laquelle on fait $h = y_0$.

$$\text{On obtient : } V_r^2 = g y_1 \quad V_r = \pm \sqrt{g y_1}$$

La longueur d'onde L est infinie avec l'intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1+Ku)}} \quad \text{pour } K = 1.$$

Le raccordement avec le niveau primitif ($y = y_0 = h$) n'est donc réalisé théoriquement qu'à l'infini amont et aval. L'équation de l'onde montre qu'en fait le raccordement est pratique-

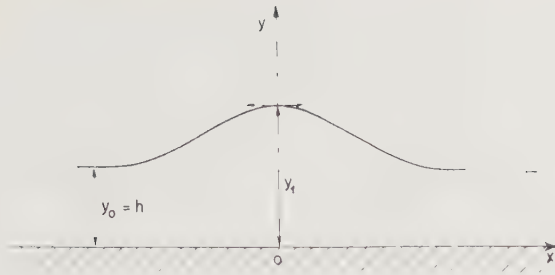


FIG. 54

ment réalisé à une distance faible du sommet de l'onde.

L'équation différentielle (27) qui définit la ligne d'eau s'écrit en effet, lorsqu'on y fait $V_r^2 = g y_1$, $h = y_0$

$$\frac{y_1 y_0^2}{3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - y_0)^2 (y_1 - y)$$

Cette équation a déjà été intégrée au cours de l'étude des mouvements permanents. Toutes les courbes intégrales se déduisent de l'une d'entre elles par une translation parallèle à Ox .

L'équation de cette courbe par rapport aux axes Ox , et Oy [Oy passant par le sommet $y = y_1$] (fig. 54) s'écrit :

$$y = y_0 + 4(y_1 - y_0) \frac{e^{\alpha x/y_0}}{(1 + e^{\alpha x/y_0})^2}$$

α étant un coefficient sans dimension qui a pour valeur :

$$\alpha = \sqrt{3 \left(1 - \frac{y_0}{y_1} \right)}$$

On retrouve ainsi les résultats obtenus par BOUSSINESQ dans ses études sur l'onde solitaire. Ce dernier adoptait les notations suivantes :

$$y_0 = H, \quad y - y_0 = h, \quad y_1 - y_0 = h_1$$

et obtenait pour équation de l'onde solitaire :

$$\frac{H^3}{3} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = h^2 (h_1 - h)$$

Avec les mêmes notations, notre équation s'écrit :

$$\frac{H^2 (H + h_1)}{3} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = h^2 (h_1 - h)$$

qui coïncide bien avec l'équation précédente lorsque h_1 est voisin de 0, c'est-à-dire pour une onde de faible amplitude. BOUSSINESQ se plaçait précisément dans cette hypothèse. BAZIN, dans ses études expérimentales, ayant vérifié que l'onde solitaire conservait sa forme caractéristique, sans déferlement, tant que y_1 est inférieur à $2h$,

on voit que nos équations représentent bien le phénomène alors même qu'on s'éloigne des hypothèses de calcul admises par BOUSSINESQ.

Celui-ci supposait également que la vitesse de l'eau dans le canal était nulle avant le passage de l'onde. Dans le cas d'une houle superposée à un courant de vitesse u_0 , la règle de composition des vitesses émises par lui se déduisait des équations de BARRÉ-DE-SAINT-VENANT, dans lesquelles la courbure de l'onde est négligée. Nos équations montrent que cette règle reste valable en deuxième approximation, à condition que la répartition des vitesses dans une section soit sensiblement uniforme. Cette hypothèse ne correspond pas à la réalité dans le cas où l'amplitude de l'onde est trop importante.

Les relations (28) et (29) nous permettent également de faire une autre remarque sur les développements classiques concernant les ondes de translation en deuxième approximation. On peut se demander en effet pour quelle raison ces développements, qui posent, dans sa généralité, le problème de la recherche des ondes de translation de faible amplitude à célérité constante, conduisent en fait uniquement à l'onde solitaire. Cette raison semble résider dans l'hypothèse, faite par BOUSSINESQ, que pour une onde de faible amplitude la vitesse de propagation est donnée par les lois de première approximation, hypothèse qui est valable uniquement dans le cas de l'onde solitaire.

L'équation (29) $\lambda = \psi(K)$ montre en effet que, dans un canal où est réalisé un régime permanent uniforme de vitesse u_0 correspondant à une hauteur d'eau h , il peut exister une infinité de houles d'amplitude donnée $y_1 - y_0 = h_1$, chacune de celles-ci ayant une célérité relative V_r et une longueur d'onde $2L$ différente. L'onde solitaire est précisément celle d'entre elles dont la vitesse de propagation :

$$V_r = \pm \sqrt{g y_1} = \pm \sqrt{g(h + h_1)}$$

est maximum. Elle correspond à : $K = 1$ $\lambda = 1$.

Envisageons maintenant le cas où le paramètre λ a une valeur voisine de 0. Il en est alors de même d'après (29) pour le paramètre :

$$K = \frac{y_1 - y_0}{y_1 + y_0 - \frac{2 V_r^2 h^2}{g y_1 y_0}}$$

ce qui nécessite une onde de faible amplitude $y_1 - y_0$. (Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante puisque, dans le cas de l'onde solitaire :

$$y_1 + y_0 - \frac{2 V_r^2 h^2}{g y_1 y_0}$$

est équivalent à $y_1 - y_0$.)

Le paramètre :

$$\lambda = \frac{y_1 + y_0 - 2h}{y_1 - y_0}$$

étant voisin de 0 et $y_1 - y_0$ petit, cela signifie que si l'on considère $y_1 - y_0$ comme un infiniment petit, $y_1 + y_0 - 2h$ doit être un infiniment petit du second ordre par rapport à $y_1 - y_0$.

On a alors affaire à une houle sensiblement sinusoïdale, dont la vitesse de propagation est indépendante de l'amplitude; K étant petit, on peut, en effet, dans l'équation (28), remplacer l'intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1+Ku)}}$$

par le premier terme de son développement en fonction de K et poser :

$$y_1 + y_0 = 2h \quad y_1 y_0 = h^2$$

Dans ces conditions, (28) s'écrit :

$$L = \frac{\pi V_r h}{\sqrt{3gh - 3V_r^2}}$$

c'est-à-dire :

$$V_r^2 = \frac{gh}{1 + \frac{\pi^2}{3} \frac{h^2}{L^2}}$$

ou :

$$V_r = \sqrt{gh \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \frac{L^2}{h^2} + \dots \right)}$$

qui, pour h/L petit, constitue une approximation au troisième ordre près de la formule classique donnant la célérité de la houle en profondeur finie :

$$V = \sqrt{g \frac{L}{\pi} \operatorname{th} \frac{\pi h}{L}} = \sqrt{gh \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \frac{h^2}{L^2} + \dots \right)}$$

Cette formule s'obtient à partir des équations générales de l'hydrodynamique en linéarisant les conditions aux limites, en négligeant les carrés et les produits des vitesses et dans l'hypothèse d'une très faible amplitude. Cette houle trochoïdale, dont la vitesse de propagation est indépendante de l'amplitude, constitue une solution du problème, mais ce n'est pas la seule. Il en existe une infinité d'autres, parmi lesquelles l'onde solitaire dont la vitesse de propagation :

$$V_r = \sqrt{gy_1} = \sqrt{g(h + h_1)}$$

n'est pas indépendante de l'amplitude.

En conclusion, les équations (28) et (29) permettent de déterminer la célérité et la longueur d'onde d'une houle d'amplitude non négligeable, superposée à un courant de vitesse u_0 , lorsque la répartition des vitesses dans une section est sensiblement uniforme.

Elles ne s'appliquent pas à la houle en profondeur infinie, ni aux ondulations dont la hauteur est trop grande.

4. — Intumescences de grande longueur où l'influence du frottement n'est pas négligeable.

L'étude des intumescences se propageant dans un canal rectangulaire de grande largeur avec une célérité constante V , se ramène à l'intégration du système différentiel (26) :

$$F = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{gy} + \frac{q^2}{3g} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]$$

$$\frac{dF}{dx} = i y - \frac{u^2}{c^2(y)} \quad (26)$$

$$u = V + \frac{q}{y}$$

qui se réduit au système (8) lorsqu'on y fait $V = 0$.

Comme dans l'étude des mouvements permanents nous remplacerons la fonction F par une

nouvelle fonction auxiliaire Φ liée à F par la relation :

$$\frac{dF}{dx} = y \frac{d\Phi}{dx}$$

On est ainsi conduit au système équivalent à (26) :

$$\begin{cases} \Phi = y + \frac{q^2}{2gy^2} + \frac{q^2}{3gy} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{2y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \\ \frac{d\Phi}{dx} = i - \frac{u^2}{yc^2(y)} \\ u = V + \frac{q}{y} \end{cases} \quad (30)$$

La forme des intumescences de grande longueur à célérité constante est donc identique à celle des lignes de remous en régime permanent.

Considérons un canal rectangulaire de grande largeur de pente i , dans lequel est réalisé un écoulement permanent uniforme de vitesse u_0 . Nous désignerons par y_0 la hauteur normale du régime uniforme reliée à u_0 et à i par la relation :

$$i = \frac{u_0^2}{c^2(y_0) y_0} = 0$$

Nous nous proposons de déterminer les solutions du système (30) qui se raccordent avec le régime uniforme précédemment défini, c'est-à-dire qui admettent comme asymptote la droite $y = y_0$.

Le problème ainsi posé se ramène à la recherche des solutions de (30) asymptotiques à la solution particulière :

$$y = y_0 \\ \Phi = \Phi_0 = y_0 + \frac{q^2}{2g y_0^2}$$

q étant une constante reliée à la vitesse absolue de propagation de l'intumescence par la relation :

$$q = (u_0 - V) y_0$$

Il ne diffère de celui résolu dans l'étude du mouvement permanent à propos des équations (9), que par la forme de la fonction $\psi(y)$ qui intervient dans les équations (10_a) (*).

La fonction $\psi(y)$ s'écrit ici :

$$\psi(y) = i - \frac{u^2}{c^2(y) y} = i - \frac{1}{y c^2(y)} \left(V + \frac{q}{y} \right)^2$$

alors qu'on avait en régime permanent :

$$\psi(y) = i - \frac{q^2}{c^2(y) y^3} \quad \text{en posant } q = \frac{Q}{l}$$

L'existence de solutions de (30) asymptotiques à $y = y_0$ est ainsi liée au signe des parties réelles des racines de l'équation caractéristique du système linéaire qui constitue les « équations aux variations » de (30) au voisinage de la solution connue : $y = y_0$.

Cette équation caractéristique (13'_a) s'écrit (*) :

$$\frac{q^2}{3g} m^3 + \left(y_0 - \frac{q^2}{g y_0^2} \right) m = y_0 \psi(y_0) \quad (13'_a)$$

dans le calcul de $\psi(y_0)$ nous négligerons la variation du coefficient de CHÉZY. En tenant compte de la relation $q = (u_0 - V) y_0$, on trouve :

$$\psi(y_0) = \frac{u_0}{y_0^2 c^2(y_0)} (3 u_0 - 2 V)$$

(*) Cf. la Houille Blanche, n° 3, 1953, p. 380.

$\psi(y_0)$ ne peut donc être négatif que pour des intumescences dont la célérité est supérieure à une fois et demie la vitesse u_0 du courant dans lequel elles se propagent.

Nous nous bornerons à étudier ici les intumescences qui se déplacent vers l'amont [$V < 0$] pour lesquelles $\psi(y_0)$ est obligatoirement positif quelle que soit leur célérité.

La constante $q = (u_0 - V) y_0$ est alors positive.

L'équation caractéristique (13_a) admet alors, comme nous l'avons vu, une racine réelle positive m_1 , deux racines réelles ou imaginaires m_2 et m_3 dont la partie réelle est négative.

Il existe donc une simple infinité de solutions du système (30) asymptotiques à la solution particulière $y = y_0$, $\Phi = \Phi_0$ lorsque x augmente indéfiniment par valeurs négatives. Ces solutions se déduisent toutes de l'une d'entre elles par une translation parallèle à l'axe Ox. Elles sont définies par les équations :

$$y = y(x - C_1) \quad \Phi = \Phi(x - C_1)$$

$y(u)$ et $\Phi(u)$ étant des fonctions parfaitement déterminées dont la forme dépend uniquement de la célérité V .

Quant au paramètre de translation, il est nécessairement de la forme $C_1 = x_0 + V(t - t_0)$ puisque les équations (30) définissent les solutions de (22) qui sont fonctions de la seule variable indépendante $x - Vt$.

Par un choix convenable de l'origine des abscisses et du temps, on peut donc écrire :

$$y = y(x - Vt) \quad \Phi = \Phi(x - Vt)$$

Dans le plan ΦOy , ces solutions sont représentées par une courbe unique (C_0) définie paramétriquement par les équations précédentes. L'allure de cette courbe (C_0) a déjà été précisée dans l'étude du régime permanent. Elle passe par le point P, intersection de la droite $y = y_0$ avec la courbe (H) d'équation :

$$\Phi = y + \frac{q^2}{2g y^2}$$

la pente de la tangente en P à (C_0) est :

$$\left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_{y=y_0} = \frac{\psi(y_0)}{m_1}$$

Les développements en série asymptotique de POINCARÉ et LIAPOUNOFF permettent également de développer $y(x - Vt)$, $\Phi(x - Vt)$ au voisinage de P en séries entières uniformément convergentes de la quantité $u = e^{m_1(x - Vt)}$. Nous n'in-

sisterons pas sur ce calcul effectué au chapitre III (*).

La courbe (C_0) est, nous l'avons vu, asymptote, lorsque x augmente indéfiniment par valeur positive, à la courbe (H) d'équation $\Phi = y + (q^2/2g y^2)$ et la ligne d'eau d'équation $y = y(x - Vt)$ admet une asymptote horizontale.

L'aspect de l'intumescence se déduit du tracé de la courbe (C_0) et comme dans l'étude du régime permanent nous serons conduit à distinguer deux cas suivant que le point P se trouve sur la branche fluviale ou torrentielle de (H).

PREMIER CAS :

$$y_0 > y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

P sur la branche fluviale de (H).

c'est-à-dire $q < y_0 \sqrt{g y_0}$, puisque $q > 0$ ou, en tenant compte de la relation : $q = (u_0 - V) y_0$:

$$\underline{V > u_0 - \sqrt{g y_0}}$$

Comme nous étudions ici les intumescences qui remontent le courant [$V < 0$], ce cas ne peut se produire que si $u_0 - \sqrt{g y_0} < 0$, c'est-à-dire si le régime permanent et uniforme qui existe dans le canal avant le passage de l'intumescence est fluvial. Nous nous placerons désormais dans cette hypothèse.

V étant négatif, la condition précédente peut s'écrire (cas d'une onde de faible célérité) :

$$\underline{|V| < \sqrt{g y_0} - u_0}$$

La courbe (C_0) et le profil en long de l'intumescence à un instant donné, sont représentés sur les figures 55 et 56.

Ce phénomène peut s'observer dans un canal où est réalisé un écoulement permanent et uniforme lorsque le plan d'eau à l'extrémité aval s'élève avec une vitesse constante. Lorsque la vitesse de montée est faible, la célérité de l'onde satisfait à la condition $|V| < \sqrt{g y_0} - u_0$ et on observe une « intumescence à courbure insensible » suivant l'expression employée par BOUSSINESQ. C'est le cas ordinaire des courants de marée qui remontent l'estuaire des fleuves. La courbe (C_0) est alors voisine de (H) et les équations (30) coïncident pratiquement avec celles de SAINT-VENANT.

DEUXIÈME CAS :

$$y_0 < y_c \quad |V| > \sqrt{g y_0} - u_0$$

Il n'en est plus de même lorsque la célérité de

l'onde est grande $|V| > \sqrt{g y_0} - u_0$. Ce cas se rencontre dans l'étude de la propagation de l'onde marée, dans le lit de certains fleuves, lorsque la vitesse de montée du flot est forte et donne lieu au phénomène connu sous le nom de « Mascaret ». Il peut s'observer également dans les canaux d'amenée des usines hydroélectriques lorsque les disjoncteurs sautent et que les régulateurs ferment rapidement l'arrivée d'eau sur les

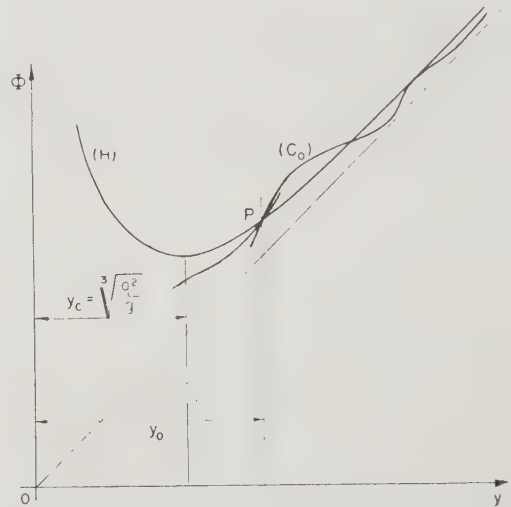


FIG. 55

turbines. Les équations classiques de première approximation ne sont plus applicables car on ne peut plus négliger la courbure de l'onde. Il est d'ailleurs impossible d'obtenir une solution des équations de SAINT-VENANT se raccordant avec le régime permanent uniforme à l'infini amont. La théorie classique conduit alors à admettre l'existence d'une discontinuité constituée par un ressaut en régime variable animé de la célérité V . Ce phénomène ne s'observe, en pratique,



FIG. 56

que lorsque la hauteur de l'intumescence est grande par rapport au tirant d'eau initial avant le passage de celle-ci.

Au contraire, lorsque la hauteur normale y_0 est peu inférieure à y_c , on voit apparaître comme en régime permanent un ressaut ondulé constitué par une onde initiale de faible courbure suivie de quelques ondulations. Le profil de l'onde initiale est d'ailleurs voisin de celui de l'onde solitaire classique de même célérité.

(*) Cf. *la Houille Blanche*, n° 3, 1953, p. 381.

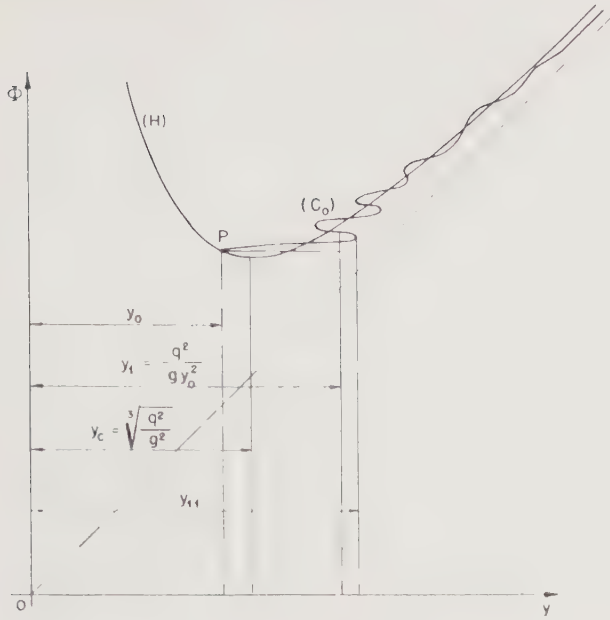


FIG. 57

Les équations (30) de seconde approximation vont nous permettre de donner une théorie du ressaut ondulé et de calculer l'amplitude et la longueur d'onde des ondulations. La courbe (C_0) et le profil en long de l'intumescence à un instant

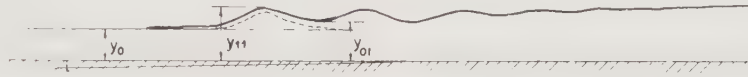


FIG. 58

donné sont représentés respectivement sur les figures 57 et 58.

En se reportant à l'étude du ressaut ondulé en régime permanent, on voit que l'onde initiale est située au-dessus de la courbe intégrale (S) de l'équation différentielle (17) :

$$\frac{q^2}{3g} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - y_0)^2 \left[\frac{q^2}{gy_0^2} - y \right] \quad (17)$$

Cette courbe (S), représentée en pointillé sur la figure 58, est très voisine, dans sa partie amont, du front de l'intumescence; l'ordonnée de son sommet $y_1 = (q^2/g y_0^2)$ diffère peu de l'ordonnée y_{11} du sommet de l'onde initiale. Or, la courbe (S) est précisément l'onde solitaire dont la vitesse de propagation dans le courant de vitesse u_0 est égale à la célérité de l'intumescence.

On a en effet :

$$g y_1 = \frac{q^2}{y_0^2} = (u_0 - V)^2$$

ou en tenant compte du fait que V est négatif :

$$V = u_0 - \sqrt{g y_1}$$

Ainsi se trouvent confirmées les constatations expérimentales sur le profil du front de l'intumescence. Par ailleurs, y_1 étant peu inférieur à y_{11} dans l'hypothèse d'un ressaut ondulé (y_0 voisin de y_c), la célérité de l'intumescence est en valeur absolue légèrement inférieure à $\sqrt{g y_{11}} - u_0$, y_{11} étant l'ordonnée du sommet de l'onde initiale. Ce résultat est conforme aux expériences de BAZIN sur les remous d'une certaine longueur.

En ce qui concerne l'amplitude et la longueur d'onde des ondulations qui suivent l'onde initiale, il est possible de les déterminer par une intégration aux différences finies des équations (30). On peut également, comme dans l'étude des nappes ondulées, remplacer la courbe (C_0) par une ligne en escalier.

Cela revient à confondre le front de l'intumescence avec l'onde solitaire (S). L'ordonnée du sommet de l'onde initiale est ainsi :

$$y_{11} = y_1 = \frac{q^2}{g y_0^2} = \frac{(u_0 - V)^2}{g}$$

tenant compte de l'équation de l'onde solitaire,

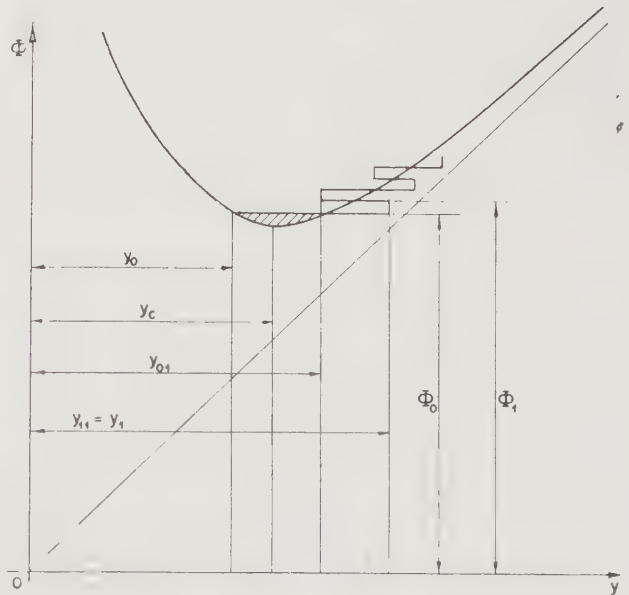


FIG. 59

on calcule la variation de Φ à partir de $\Phi_0 = y_0 + q^2/(2g y_0^2)$ lorsque y croît de y_0 à y_1 en utilisant la relation :

$$\frac{d\Phi}{dx} = i \frac{u^2}{y c^2(y)}$$

soit Φ_1 la valeur de Φ pour $y = y_1$ ainsi calculée, l'ordonnée y_{01} du point bas de la première ondulation s'obtiendra à partir de la relation déjà démontrée :

$$\Phi_1 = \frac{y_1 + y_{01}}{2} + \frac{2}{2g y_1 y_{01}}$$

équation dont il convient de prendre la racine la plus grande. La demi-longueur d'onde L_0 , distance entre les deux premiers sommets de l'intu-

mescence, sera alors donnée par l'intégrale elliptique :

$$L_0 = \frac{q \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1+Ku)}}}{\sqrt{3g \left[\frac{y_{01} + y_1}{2} - \frac{q^2}{g y_{01} y_1} \right]}}$$

avec :

$$K = \frac{y_1 - y_{01}}{y_1 + y_{01} - \frac{2q^2}{g y_{01} y_1}}$$

On déterminerait ainsi de proche en proche l'amplitude et la longueur d'onde des ondulations. La courbe (C_0) étant asymptote à (H) , cette amplitude s'amortit rapidement et le profil de l'intumescence tend asymptotiquement vers une droite horizontale.

INTUMESCENCES A CÉLÉRITÉ CONSTANTE SE RACCORDANT A L'INFINI AVAL AVEC LE RÉGIME PERMANENT UNIFORME.

Ce sont les solutions du système (30) asymptotiques à la solution particulière $y = y_0$, $\Phi = \Phi_0$ lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives. Elles correspondent aux deux racines non positives m_2 et m_3 de l'équation caractéristique (13_a). Ces racines sont, en général, imaginaires conjuguées sauf lorsque la célérité de propagation est en valeur absolue largement supérieure à $\sqrt{g y_0} - u_0$, mais leur partie réelle est négative. L'étude de ces solutions est identique à celle précédemment faite à propos du régime permanent. Il en existe une double infinité dépendant de deux constantes arbitraires.

De telles intumescences peuvent être obtenues de la manière suivante. Considérons un canal rectangulaire de grande largeur, de pente i , dans lequel est réalisé un écoulement permanent uniforme. Désignons par y_0 la hauteur d'eau normale et u_0 la vitesse du courant. Nous supposons également le régime fluvial $u_0 < \sqrt{g y_0}$.

Considérons alors une vanne d'ouverture don-

née a , barrant toute la largeur du canal et se déplaçant dans ce dernier avec une vitesse constante V (on suppose $V < 0$, la vanne se déplace vers l'amont).

Au bout d'un temps très court, un état de régime s'établit. On crée de cette manière à l'amont de la vanne une intumescence (I_1) de célérité V se raccordant à l'amont avec le régime uniforme existant auparavant et qui est analogue à celles étudiées au paragraphe précédent. Sous certaines conditions, on voit également apparaître, à l'aval de la vanne, une intumescence (I_2) de célérité V se raccordant à l'aval avec le régime uniforme de vitesse u_0 .

On est évidemment conduit à distinguer deux cas suivant que le régime est fluvial ou torrentiel par rapport à des axes animés de la vitesse V de déplacement de la vanne. La forme des intumescences correspondant à ces deux cas est représentée sur les figures 60 et 61.

$$1^\circ \quad |V| < \sqrt{g y_0} - u_0$$

$\alpha)$ CAS D'UNE GRANDE OUVERTURE a DE LA VANNE.

Le ressaut est noyé à l'aval de celle-ci. L'intumescence (I_2) n'existe pas (fig. 60 α).

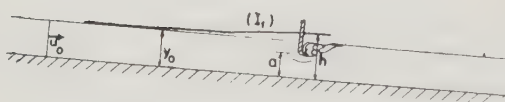


FIG. 60 α

$\beta)$ CAS D'UNE OUVERTURE MOYENNE DE LA VANNE.

Ressaut ondulé à l'aval de la vanne (fig. 60 β).



FIG. 60 β

γ) CAS D'UNE OUVERTURE FAIBLE DE LA VANNE. — Ressaut déferlant à l'aval (fig. 60 γ).

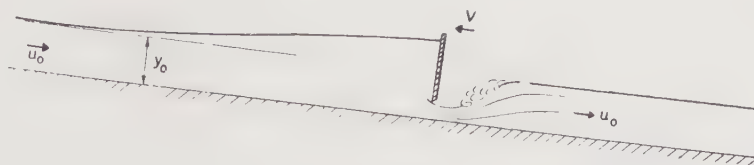


FIG. 60 γ

$$2^{\circ} \quad V > \sqrt{g y_0} - u_0$$

Dans tous les cas, le problème à résoudre est le suivant : Pour une ouverture a et une vitesse de translation V de la vanne, déterminer la hauteur d'eau h à l'amont de la vanne et les courbes (I_1) et (I_2) .

Nous utiliserons des axes Ox et Oy représentés sur la figure 61 et animés de la vitesse V de translation de la vanne.

Par rapport à ces axes, les intumescences (I_1) et (I_2) d'équations $y = y_1(x)$ $y = y_2(x)$ sont des solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q^2}{6g} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \Phi y^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{q^2}{2g} - Fy \\ \frac{d\Phi}{dx} = i - \frac{u^2}{y c^2(y)} \\ \frac{dF}{dx} = i y - \frac{u^2}{c^2(y)} \\ u = V + \frac{q}{y} \end{array} \right. \quad (31)$$

qui, on le démontre aisément, est équivalent aux deux systèmes (26) et (30).

q est une constante ayant pour valeur :

$$q = (u_0 - V) y_0$$

Il faut rechercher deux solutions :

$$\begin{array}{llll} (S_1) & y = y_1(x) & \Phi = \Phi_1(x) & F = F_1(x) \\ (S_2) & y = y_2(x) & \Phi = \Phi_2(x) & F = F_2(x) \end{array}$$

du système (31) asymptotiques respectivement pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$ à la solution particulière :

$$\begin{aligned} y &= y_0 & \Phi &= \Phi_0 = y_0 + \frac{q^2}{2g y_0^2} \\ F &= F_0 = \frac{y_0^2}{2} + \frac{q^2}{g y_0} \end{aligned}$$

(S_1) et (S_2) dépendent donc respectivement d'une et de deux constantes arbitraires. Ces constantes seront déterminées par les conditions aux limites au droit de la vanne $[x = 0]$.

Une première condition évidente s'écrit :

$$y_2(0) = a$$

a étant l'ouverture de la vanne.

Les deux autres s'obtiennent en appliquant le théorème de BERNOULLI et le théorème des quantités de mouvement à la portion de fluide comprise entre la section de la vanne et une section située légèrement en amont, ces deux sections étant animées de la vitesse de translation V .

Un calcul immédiat, déjà effectué lors de l'étude du régime permanent, conduit aux deux relations :

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0)$$

$$F_1(0) = F_2(0) + \frac{P}{g}$$

où P représente la poussée du fluide sur la face amont de la vanne.

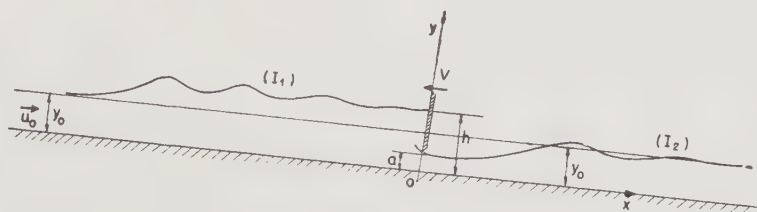


FIG. 61

5. — Etude du ressaut déferlant en régime variable.

Nous terminerons ces considérations sur les intumescences à célérité constante par une théorie élémentaire du ressaut qui nous permettra de retrouver les résultats obtenus par BARRÉ-DE-SAINT-VENANT, tout en précisant leurs limites d'application.

Les développements précédents sur le ressaut ondulé ne sont valables que lorsque la hauteur du corps de l'intumescence est inférieure au tirant d'eau initial. Lorsque cette hauteur augmente, on observe un raidissement du front de l'onde initiale, qui finit par déferler. Les équations (26) qui supposent la continuité de la ligne d'eau ne sont plus applicables; on observe d'ailleurs, même avant le déferlement, une variation de la répartition des vitesses entre deux sections voisines et nos équations ne peuvent plus alors que traduire l'allure du phénomène, c'est-à-dire la tendance au raidissement et au déferlement du front de l'intumescence.

En fait, ce déferlement apparaît, pour une hauteur du corps de l'intumescence bien inférieure à la hauteur théorique qu'on pourrait déduire de nos équations. [Voir théorie du déferlement du ressaut en régime permanent.]

L'onde initiale perd sa forme caractéristique et les ondulations qui la suivent finissent par disparaître entièrement. Cette discontinuité dans l'écoulement s'accompagne nécessairement d'une perte d'énergie localisée qui correspond à une variation de la fonction Φ qui intervient dans les équations (30) par application du théorème de BERNOULLI généralisé. On peut par contre admettre qu'entre deux sections situées à l'amont et à l'aval du ressaut il n'y a pas discontinuité de la fonction F qui intervient dans l'application du théorème des quantités de mouvement à condition de négliger entre ces deux sections l'influence des forces de pesanteur et de frottement, hypothèse qui est valable dans le cas d'un ressaut déferlant. Comme on peut également dans la section aval négliger la courbure et la pente de la ligne d'eau par suite de la disparition des ondulations, on est conduit, par application des équations (26) et eu égard à la discontinuité de la surface libre, aux deux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(y_0) = \frac{y_0^2}{2} + \frac{q^2}{g y_0} = \frac{y_1^2}{2} + \frac{q^2}{g y_1} = F(y_1) \\ (u_0 - V) y_0 = (u_1 - V) y_1 = q \end{array} \right. \quad (32)$$

y_0 et y_1 désignant respectivement les deux sections

situées à l'amont et à l'aval du ressaut. Les équations (30) donnent alors la discontinuité de la fonction Φ au passage du ressaut, c'est-à-dire la perte d'énergie localisée :

$$\Phi(y_1) - \Phi(y_0) = y_1 + \frac{q^2}{2 g y_1^2} - y_0 - \frac{q^2}{2 g y_0^2}$$

Considérons dans ces conditions un canal rectangulaire de grande largeur où est réalisé un écoulement permanent uniforme de vitesse u_0 correspondant à une hauteur normale y_0 . Le débit dans une section quelconque est $Q_0 = u_0 y_0$. Supposons alors qu'on maintienne à l'amont d'une section déterminée du canal un débit constant $Q_1 < Q_0$ par un réglage convenable d'une

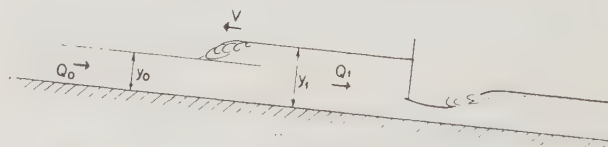


FIG. 62

vanne placée dans cette section. On crée dans ces conditions à l'amont de la vanne une intumescence qui remonte le courant avec une certaine célérité V .

On se propose de déterminer, dans l'hypothèse d'un ressaut déferlant la vitesse de propagation V de l'intumescence et sa hauteur y_1 .

Les relations (32) s'écrivent dans ces conditions :

$$\frac{y_0^2}{2} + \frac{q^2}{g y_0^2} = \frac{y_1^2}{2} + \frac{q^2}{g y_1^2}$$

$$\begin{aligned} (u_0 - V) y_0 &= Q_0 - V y_0 = (u_1 - V) y_1 \\ &= Q_1 - V y_1 = q \end{aligned}$$

d'où on tire respectivement :

$$(C_1) \quad q^2 = g \frac{y_1 y_0}{2} (y_1 + y_0)$$

$$(C_2) \quad q = \frac{Q_0 y_1 - Q_1 y_0}{y_1 - y_0}$$

Les courbes représentatives de ces deux fonctions de y_1 sont tracées sur les figures (63₁) et (63₂).

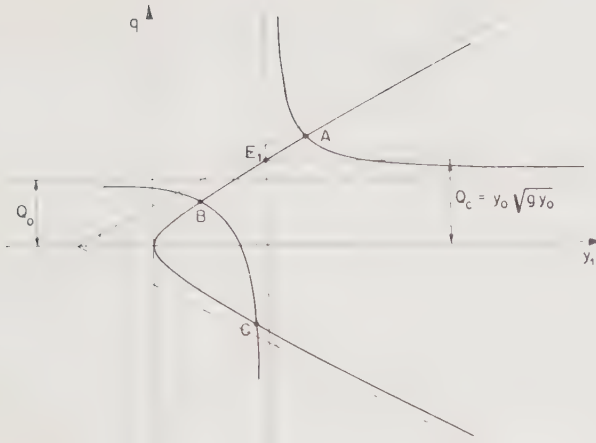


FIG. 631

Les deux cas de figures (631) et (632) correspondent aux deux hypothèses :

(631) $Q_0 < y_0 \sqrt{g y_0}$, régime permanent fluvial dans le canal,

(632) $Q_0 > y_0 \sqrt{g y_0}$, régime permanent torrentiel dans le canal.

La hauteur y_1 de l'intumescence est donnée par l'abscisse des points d'intersection des courbes (C_1) et (C_2). Le problème admet en général trois solutions dont l'une au moins correspondant au point A est réelle.

Les deux solutions qui correspondent aux points B et C donnent des hauteurs d'intumescences y_1 inférieures à y_0 .

Elles concernent des ondes descendantes à célérité positive V dont l'une est plus rapide et l'autre moins rapide que le courant de vitesse u_0 .

La solution correspondant à une onde remontant le courant [$V < 0$] est donnée par l'abscisse y_1 du point A.

Sa vitesse de propagation :

$$V = u_0 - \frac{q}{y_0} = u_0 - \sqrt{g y_1 \times \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_1}{y_0} \right)}$$

sa célérité relative par rapport au courant de vitesse u_0 :

$$V_r = - \sqrt{g y_1 \times \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y_1}{y_0} \right)}$$

constitue la formule classique de BARRÉ-DE-SAINT-VENANT.

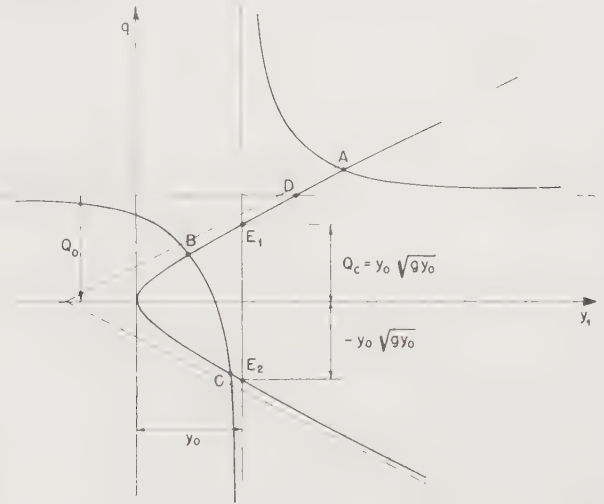


FIG. 632

Cherchons maintenant la limite de la hauteur y_1 de l'intumescence lorsque le débit Q_1 à l'aval du ressaut tend vers Q_0 . Cette limite, on le voit immédiatement sur les figures (631) et (632), dépend de la nature du régime permanent uniforme réalisé dans le canal avant le passage de l'onde.

1° RÉGIME FLUVIAL : $Q_0 < y_0 \sqrt{g y_0}$. Lorsque Q_1 tend vers Q_0 , le point A de (631) tend vers le point E_1 d'abscisse y_0 ; y_1 tend vers y_0 , l'amplitude de l'intumescence tend vers 0. Il ne peut donc exister d'intumescence stationnaire en régime fluvial permanent [$Q_1 = Q_0$].

2° RÉGIME TORRENTIEL : $Q_0 > y_0 \sqrt{g y_0}$. Lorsque Q_1 tend vers Q_0 , le point A de (632) tend vers le point D d'intersection de (C_1) avec la droite $q = Q_0$. La hauteur de l'intumescence y_1 tend donc vers une limite y_{1p} différente de y_0 qui constitue la racine positive de l'équation :

$$\frac{2 Q_0^2}{g} = y_{1p} y_0 (y_{1p} + y_0)$$

Cette relation est précisément l'équation caractéristique du ressaut en régime permanent.

La vitesse de propagation de l'intumescence est donnée par :

$$V = u_0 - \frac{q}{y_0} = \frac{Q_0 - q}{y_0} = 0$$

Elle est alors nulle.

Ainsi se trouve justifié le fait de considérer comme une onde stationnaire le ressaut en régime permanent.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	5
--------------------	---

PREMIÈRE PARTIE

Ecoulements permanents

CHAPITRE PREMIER

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT.....	6
1. — A partir de la fonction d'impulsion.....	6
2. — A partir de la charge spécifique (équivalence des deux systèmes).....	9

CHAPITRE II

ETUDE GÉNÉRALE DES LIGNES DE REMOUS.....	10
--	----

CHAPITRE III

DÉTERMINATION DES LIGNES DE REMOUS.....	19
1. — Canal de pente uniforme s'étendant à l'infini amont (régime fluvial et torrentiel, ressaut, ressaut ondulé, théorie du déferlement).....	20
2. — Canal constitué de deux portions de pentes différentes (notion de section de contrôle).....	23
3. — Ecoulement par vanne de fond.....	26
4. — Ecoulement sur un déversoir à large seuil (ondulations de surface, influence de la rugosité).....	34

CHAPITRE IV

COMPARAISON ENTRE L'ÉTUDE THÉORIQUE D'UNE NAPPE ONDULÉE SUR UN DÉVERSOIR A SEUIL ÉPAIS ET LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....	41
--	----

DEUXIÈME PARTIE

Etude des écoulements en régime variable

CHAPITRE PREMIER

EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE L'ÉCOULEMENT (cas des intumescences à célérité constante).....	46
---	----

CHAPITRE II

THÉORIE DE LA HOULE EN EAU COURANTE EN DEUXIÈME APPROXIMATION.....	50
--	----

CHAPITRE III

INTUMESCENCES DE GRANDE LONGUEUR, COMPTE TENU DU FROTTEMENT (intumescences à célérité constante se raccordant à l'infini amont ou aval avec le régime permanent uniforme).....	54
--	----

CHAPITRE IV

RESSAUT DÉFERLANT EN RÉGIME VARIABLE.....	60
---	----

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Le problème fondamental du tassement des couches argileuses

VU, et approuvé.

Paris, le 7 juin 1952.

Le Doyen de la Faculté des Sciences :

J. PÈRÈS.

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Paris :

JEAN SARRAILH.

